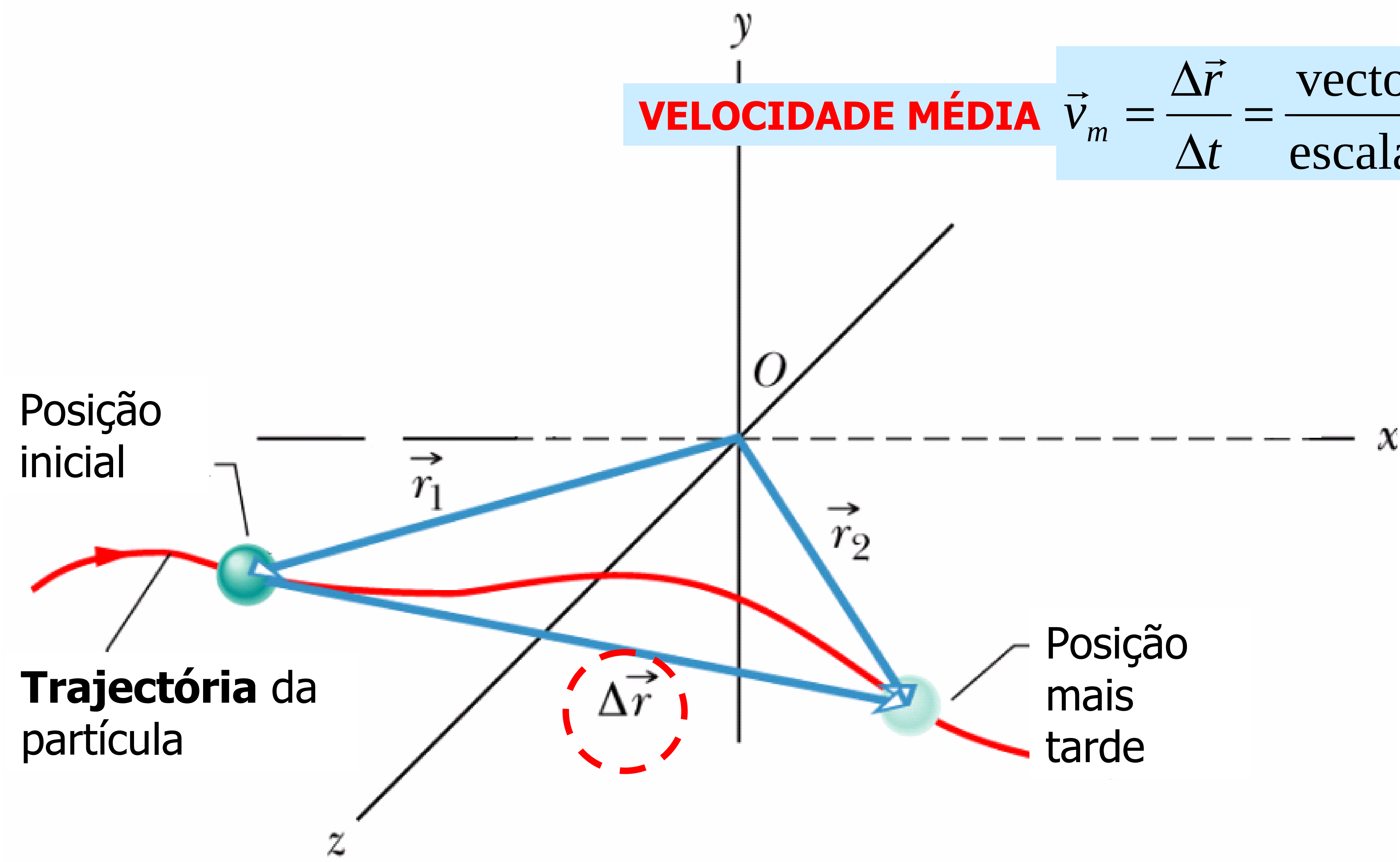
Aula 1-4 - Movimento a 1D, 2D e 3D

- Posição e Deslocamento
- Velocidade média e instantânea
- Aceleração média e instantânea
- Da aceleração para a posição
- Movimento de projécteis

Posição, Deslocamento e Trajectória e Veloc. média

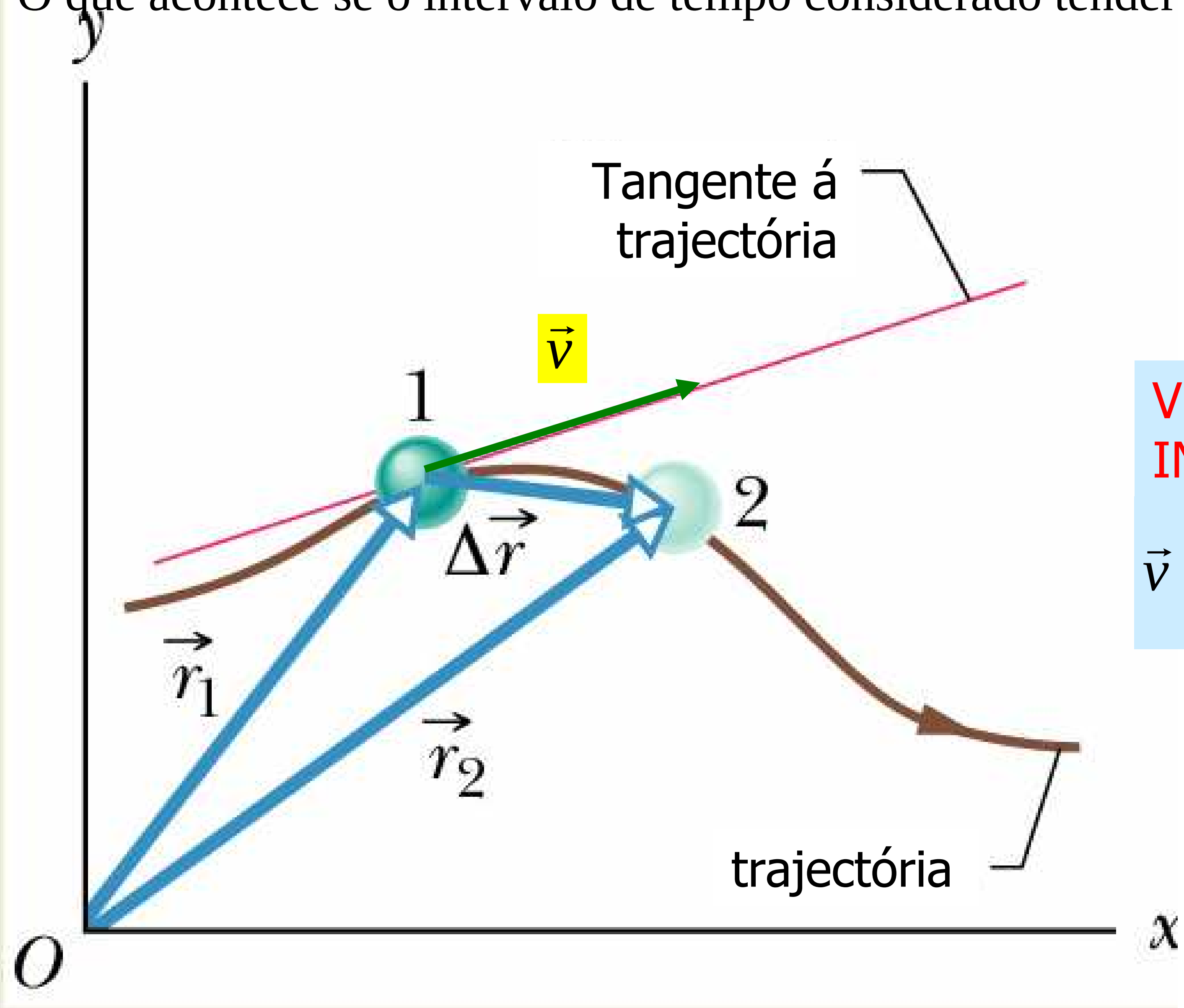


VELOCIDADE MÉDIA $\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\text{vector}}{\text{escalar}}$

Nota: A velocidade média é um **vector paralelo** a **Δr**

Velocidade Instantânea

O que acontece se o intervalo de tempo considerado tender para zero?



VELOCIDADE INSTANTÂNEA

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Nota: A velocidade instantânea é um **vector tangente** á trajectória. Porquê?

O **vector posição** tem três ***coordenadas cartesianas***,

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{e}_x + y(t)\,\hat{e}_y + z(t)\,\hat{e}_z$$

$$\Downarrow$$

O **vector velocidade** é a derivada do **vector** posição,

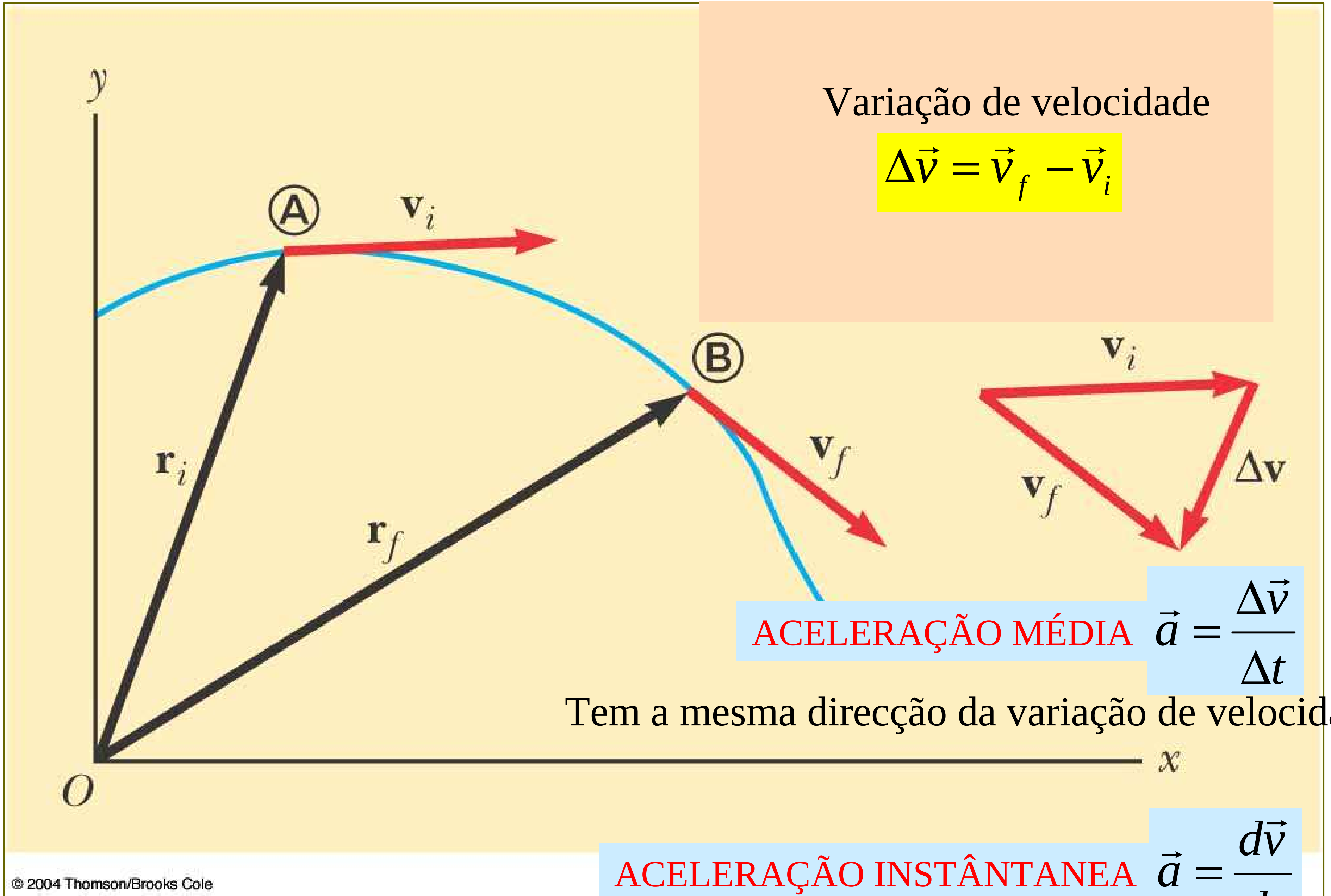
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\,\hat{e}_x + \frac{dy(t)}{dt}\,\hat{e}_y + \frac{dz(t)}{dt}\,\hat{e}_z$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{e}_x + v_y(t)\,\hat{e}_y + v_z(t)\,\hat{e}_z$$

O **vector velocidade** também tem três ***coordenadas cartesianas***,

Aceleração média e instantânea



Variação de velocidade

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$$

ACELERAÇÃO MÉDIA $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

Tem a mesma direcção da variação de velocidade

ACELERAÇÃO INSTÂNTANEA $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

O **vector velocidade** tem três **componentes cartesianas**

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{e}_x + v_y(t)\,\hat{e}_y + v_z(t)\,\hat{e}_z$$

O **vector aceleração** é a derivada do vector velocidade,

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x}{dt}\,\hat{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\,\hat{e}_y + \frac{dv_z}{dt}\,\hat{e}_z$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\,\hat{e}_x + a_y(t)\,\hat{e}_y + a_z(t)\,\hat{e}_z$$

O **vector aceleração** também tem três **componentes cartesianas**

As equações escalares do movimento

Quando temos a expressão do vector-posição em função do tempo e queremos obter o vector-velocidade e vector-aceleração:

$$\boxed{x = x(t) \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}}$$

$$\boxed{y = y(t) \quad \Rightarrow \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad e \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}}$$

$$\boxed{z = z(t) \quad \Rightarrow \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad e \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}}$$

Da aceleração para a posição (caso geral)

Quando **temos** o vector-aceleração em função do tempo e **queremos obter** o vector-velocidade e o vector-posição

$$a_x = a_x(t) \quad ; \quad v_x - v_{ox} = \int_0^t a_x dt \quad e \quad x - x_o = \int_0^t v_x dt$$

$$a_y = a_y(t) \quad ; \quad v_y - v_{oy} = \int_0^t a_y dt \quad e \quad y - y_o = \int_0^t v_y dt$$

$$a_z = a_z(t) \quad ; \quad v_z - v_{oz} = \int_0^t a_z dt \quad e \quad z - z_o = \int_0^t v_z dt$$

Caso particular: Movimento UNIFORMEMENTE ACELERADO, 3D

Aceleração | **Velocidade** | **Posição**

$$\vec{v} = \int \vec{a}\,dt$$

INTEGRAÇÃO

$$\vec{r} = \int \vec{v}\,dt$$

VECTOR CONSTANTE

$$\vec{a} \begin{cases} a_x \\ a_y \\ a_z \end{cases}$$

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = v_{ox} + a_x t \\ v_y = v_{oy} + a_y t \\ v_z = v_{oz} + a_z t \end{cases}$$

$$\vec{r} \begin{cases} x = x_o + v_{ox} t + \dfrac{a_x t^2}{2} \\ y = y_o + v_{oy} t + \dfrac{a_y t^2}{2} \\ z = z_o + v_{oz} t + \dfrac{a_z t^2}{2} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

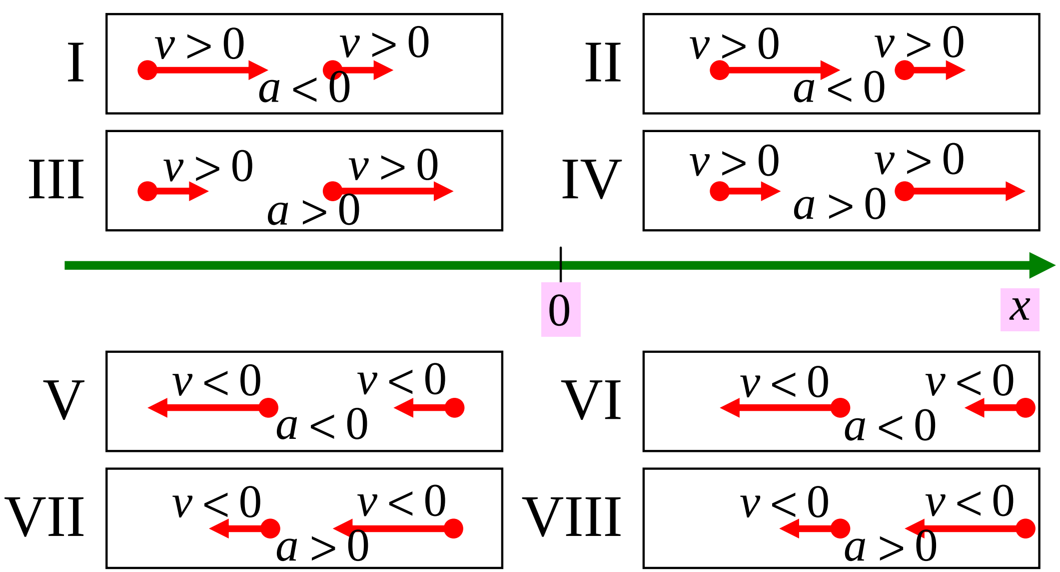
DERIVAÇÃO

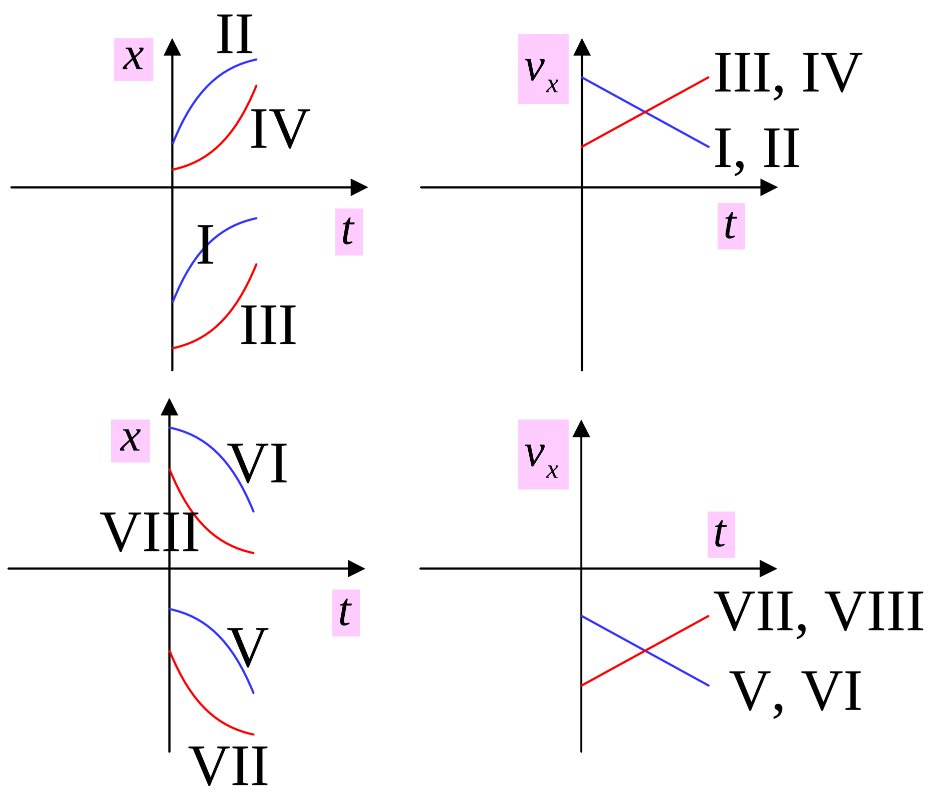
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Exercício

Estão assinalados no gráfico várias situações de posições e velocidades de um móvel nos instantes t=0 e t=10s. Para cada rectângulo indique os sinais da velocidade e da aceleração. (ver exemplo)

Trace, nos gráficos xt e $v_x t$, curvas possíveis, correspondente a cada uma das situações.





Actividades: Aula01

Uma partícula desloca-se com uma velocidade dada por $v = 8t - 7$ onde v está em metro por segundo e t em segundo.

a) Determine a aceleração média em m/s^2 nos intervalos de 1 s que principiam em t=3 s e em t=4 s.

b) Qual é a aceleração instantânea m/s^2 em qualquer instante?

c) Qual o deslocamento entre t=1 s e em t=2 s.

a) $$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 8\,\text{m/s}^2$$

b) $$a = \frac{dv}{dt} = 8\,\text{m/s}^2$$

Para o caso de aceleração instantânea constante, esta é igual à aceleração média.

c) Sabendo que v_o= -7 m/s

$$x(t_2) - x(t_1) = \left[v_o t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2\right] - \left[v_o t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2\right] = 5$$

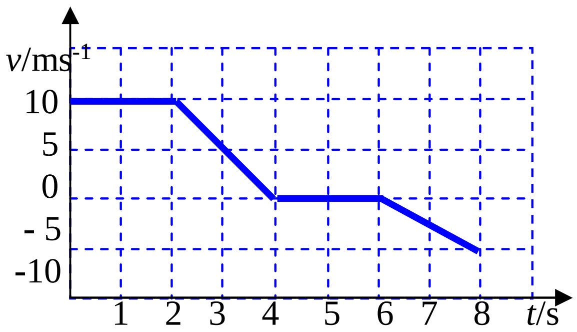
Actividades: Aula01

Um objecto move-se em linha recta (eixo dos *x*), sendo a sua velocidade em função do tempo dada pelo gráfico da figura.

a)Quais os intervalos em que a aceleração é nula, constante, não constante?

b)Quanto vale a aceleração nos intervalos 2- 4 s e 6-8 s?

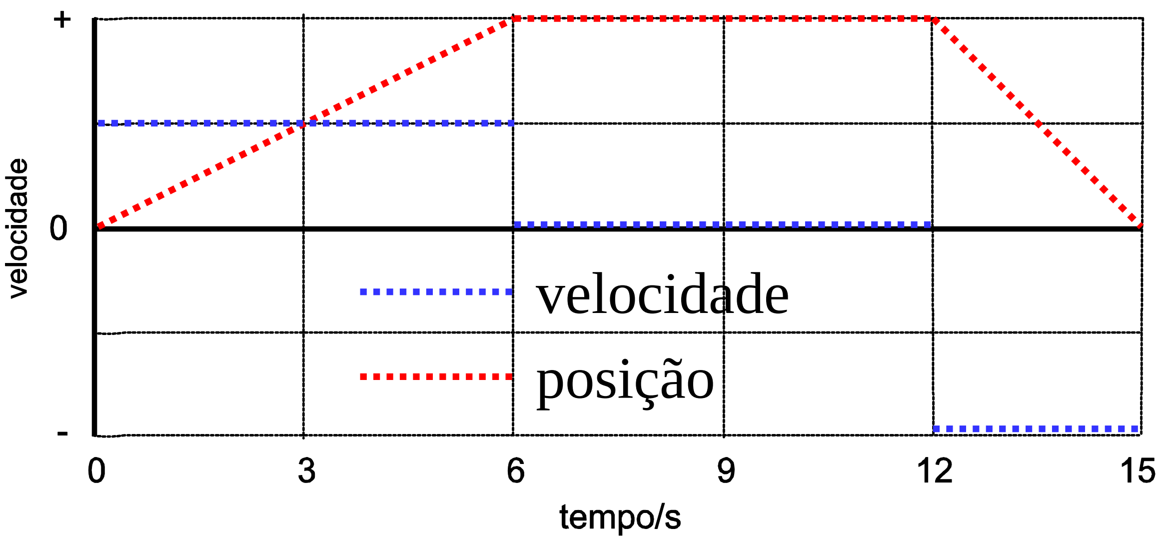
c)Em que intervalo (s) o corpo se move no sentido positivo, em que intervalo (s) o corpo se move no sentido negativo do eixo dos *x* e em que intervalo está parado.



Exercício

Utilizando uma *linha tracejada*, esboce no sistema de referência abaixo a sua **previsão** do gráfico da *velocidade* e da posição em função do *tempo* quando uma pessoa:

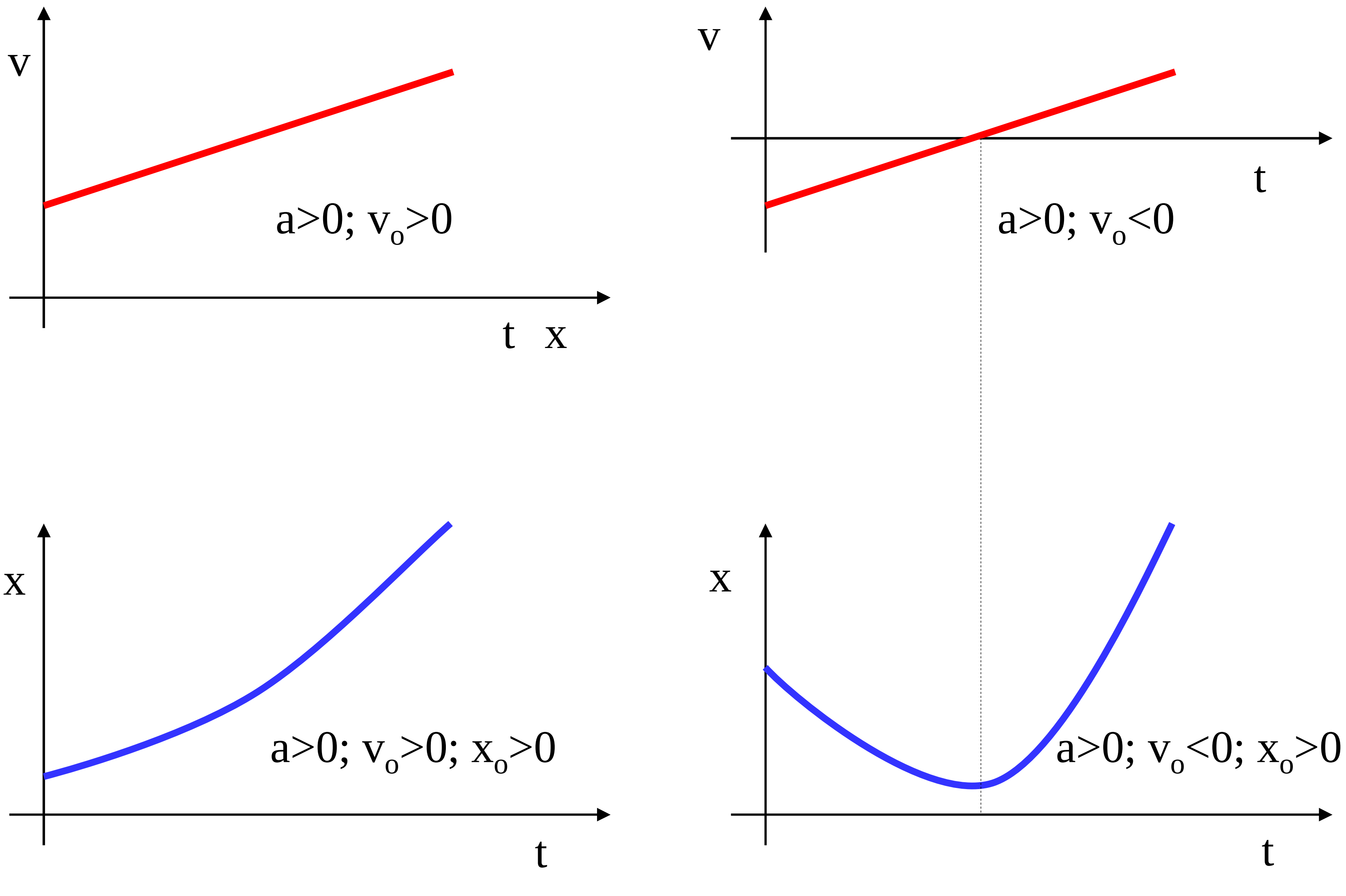
1. se afasta do detector devagar e com velocidade constante, durante 6 segundos;
2. depois fica imóvel durante seis segundos;
3. e depois se aproxima do detector com velocidade constante dupla da anterior.
4. Escreva as equações da velocidade e da posição em função do tempo.



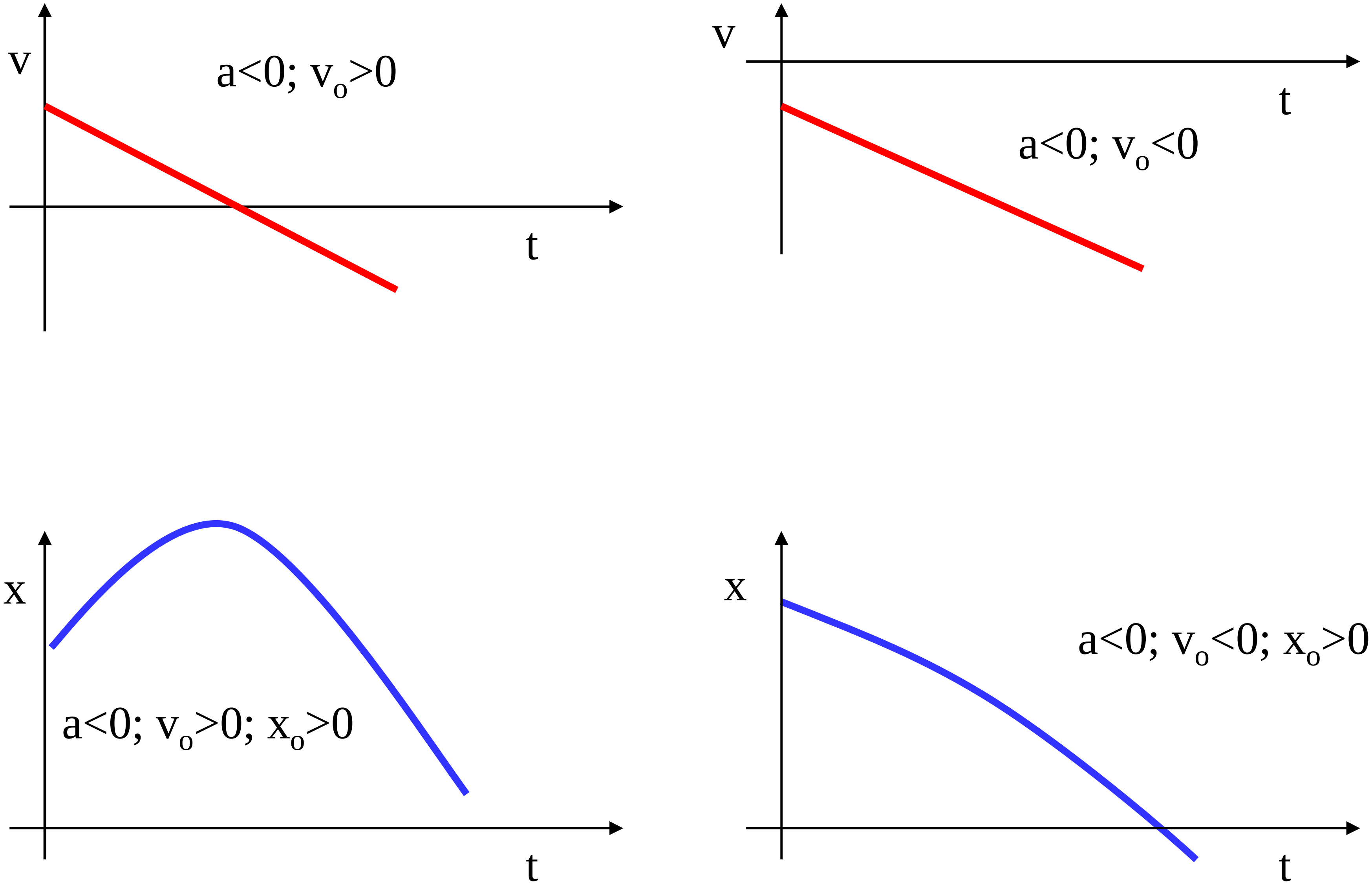
$$v = \begin{cases} 1 & 0 < t < 6 \\ 0 & 6 < t < 12 \\ -2 & 12 < t < 15 \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} t & 0 < t < 6 \\ 6 & 6 < t < 12 \\ 6 - 2(t - 12) & 12 < t < 15 \end{cases}$$

Movimento uniformemente acelerado a 1D

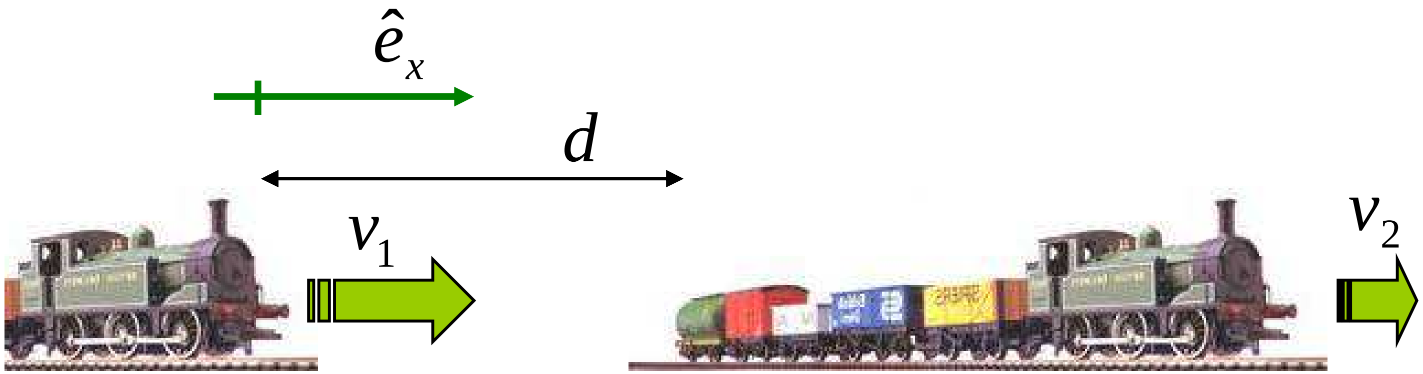


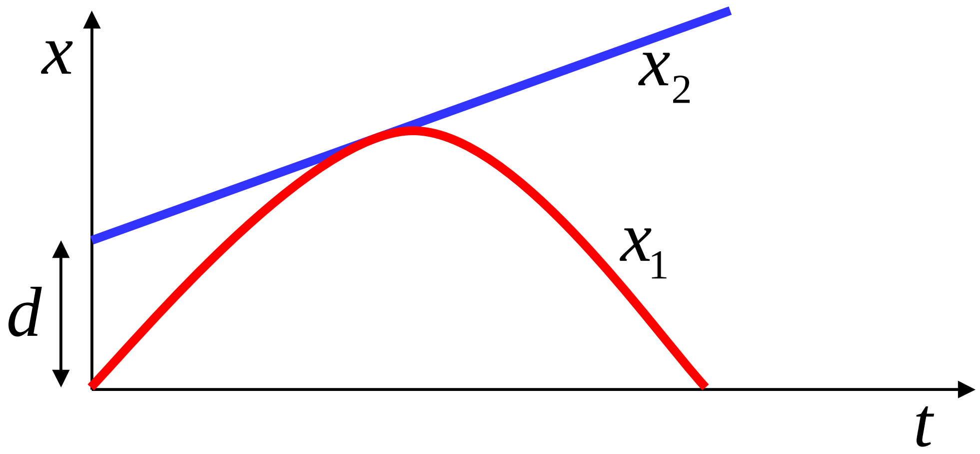
Movimento uniformemente acelerado a 1D



Problema

O maquinista de um comboio deslocando-se com velocidade v_1 avista um comboio de mercadorias à distância *d* à frente de si e movendo-se com uma velocidade menor v_2. Para evitar a colisão ele trava imprimindo ao comboio uma desaceleração *a*. Qual a relação entre v_1, v_2, *a* e *d* para que a colisão seja evitada? (R: $a > (v_1 - v_2)^2 / 2d$ para que não haja colisão)





Relação entre velocidade, aceleração e deslocamento

No movimento uniformemente acelerado a **uma dimensão**,

$$x = x_o + v_{ox}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v_x = v_{ox} + at$$

Eliminando *t* as duas equações:

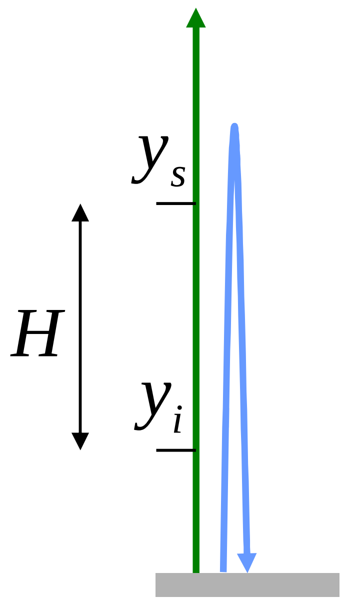
$$\boxed{v_x^2 = v_{ox}^2 + 2a(x - x_o)}$$

Esta equação relaciona a variação da velocidade entre dois instantes com o deslocamento entre esses mesmos dois instantes sabendo a aceleração.

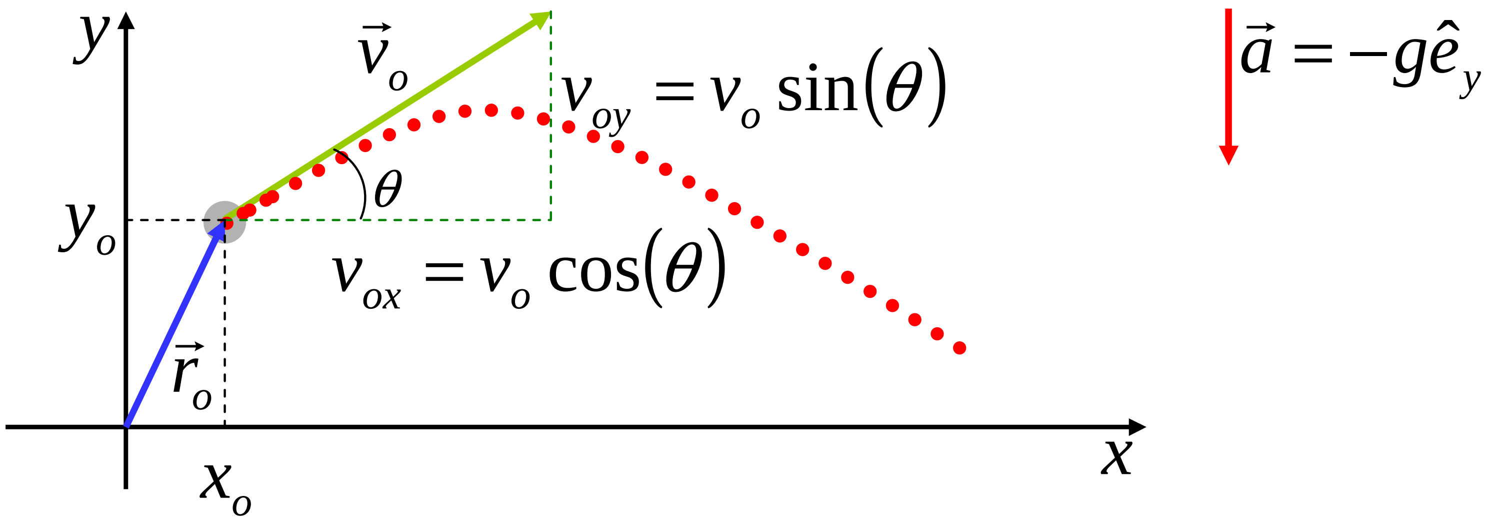
Problema

No laboratório NPL (National Physical Laboratory) em Inglaterra é efectuada uma experiência para a determinação de g lançando na vertical uma bola de vidro e deixando-a cair. Se Δt_i e Δt_s forem os intervalos de tempo entre passagens num nível inferior e superior respectivamente (ver figura) e H a distância entre níveis mostre que,

$$g = \frac{8H}{\left(\Delta t_i^2 - \Delta t_s^2\right)}$$



Aplicação ao LANÇAMENTO DE PROJECTEIS, 2D



Condições iniciais:

$$\left.\begin{array}{l} v_{ox} = v_o \cos(\theta) \\ v_{oy} = v_o \sin(\theta) \end{array}\right\} \equiv \quad \vec{v}_o = v_{ox}\hat{e}_x + v_{oy}\hat{e}_y$$

$$\left.\begin{array}{l} r_{ox} = x_o \\ r_{oy} = y_o \end{array}\right\} \equiv \quad \vec{r}_o = x_o\hat{e}_x + y_o\hat{e}_y$$

Aplicação ao LANÇAMENTO DE PROJECTEIS, 2D

$\hat{e}_y$

$\vec{a} = -g\hat{e}_y$

Integração

$$\vec{a} \begin{cases} 0\ \hat{e}_x \\ -g\ \hat{e}_y \end{cases}$$

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = v_{ox} & \hat{e}_x \\ v_y = v_{oy} - gt & \hat{e}_y \end{cases}$$

$$\vec{r} \begin{cases} x = x_o + v_{ox}t & \hat{e}_x \\ y = y_o + v_{oy}t - \dfrac{gt^2}{2} & \hat{e}_y \end{cases}$$

Derivação

Eqs. das velocidades

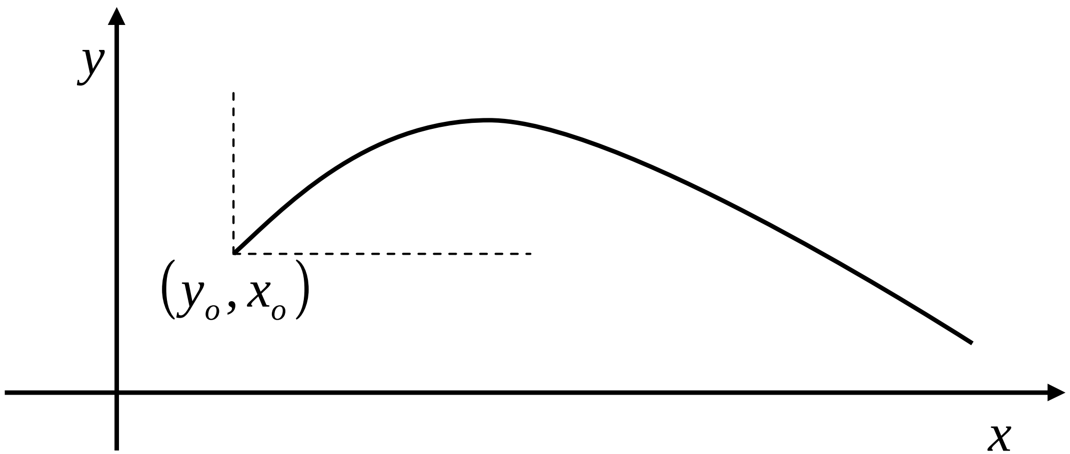
Eqs. dos espaços

1. Os movimentos em x e y são **independentes**.
2. **No eixo x** o projéctil percorre distâncias iguais em tempos iguais, i.e. a velocidade é constante
3. **No eixo y** o movimento é acelerado e a velocidade varia uniformemente

Chama-se **trajectória** á curva descrita por um móvel no espaço.

Se o movimento se efectuar a duas dimensões, elimina-se o tempo das equações x=x(t) e y=y(t) para obter uma função do tipo y=y(x),

Q: Mostre que a trajectória descrita por um projéctil é uma parábola.

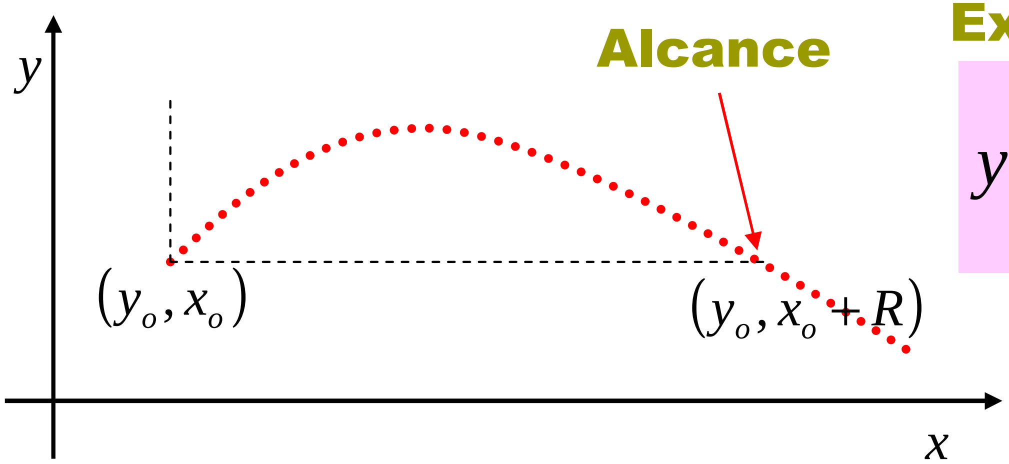


$$\vec{r} = \begin{cases} x = x_o + v_{ox} t \\ y = y_o + v_{oy} t - \dfrac{g t^2}{2} \end{cases}$$

$$y - y_o = \frac{v_{oy}}{v_{ox}} (x - x_o) - \frac{g}{2 v_{ox}^2} (x - x_o)^2$$

Concavidade?
Zeros?
Alcance máximo

Alcance máximo



Expressão Geral do Movimento

$$y - y_o = \frac{v_{oy}}{v_{ox}}(x - x_o) - \frac{g}{2v_{ox}^2}(x - x_o)^2$$

Quando volta a atingir a altura $y=y_o$:
$x=x_o+R$

Zeros? Se a origem estivesse localizada em (x_o,y_o) o outro zero estaria localizado em,

$$R = \frac{2v_{ox}v_{oy}}{g} = \frac{v_o^2 \sin(2\theta)}{g}$$

O alcance máximo R_{max}, ocorre para o ângulo de 45º. Nesse caso,

$$R_{max} = \frac{v_o^2}{g}$$

Nota:

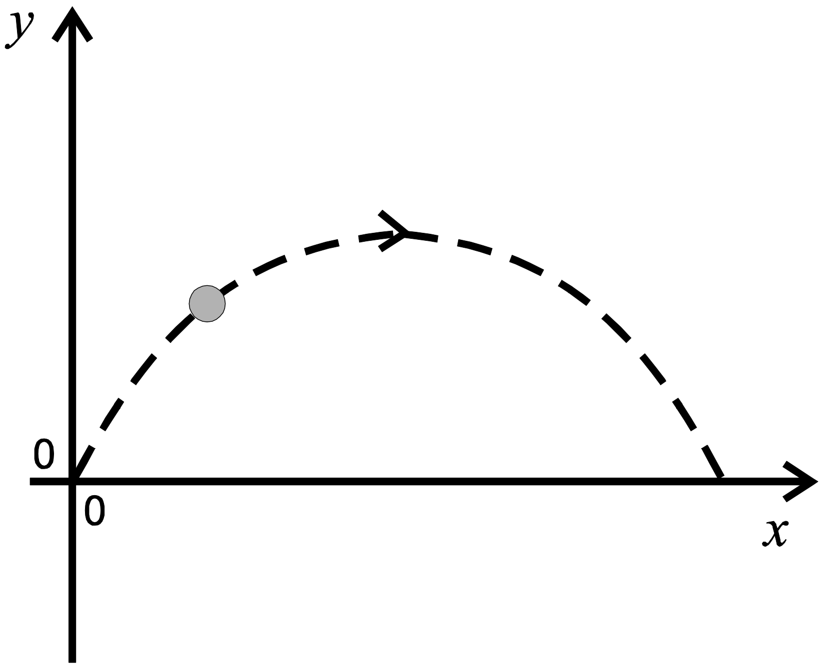
$$2\sin(\theta)\cos(\theta) = \sin(2\theta)$$

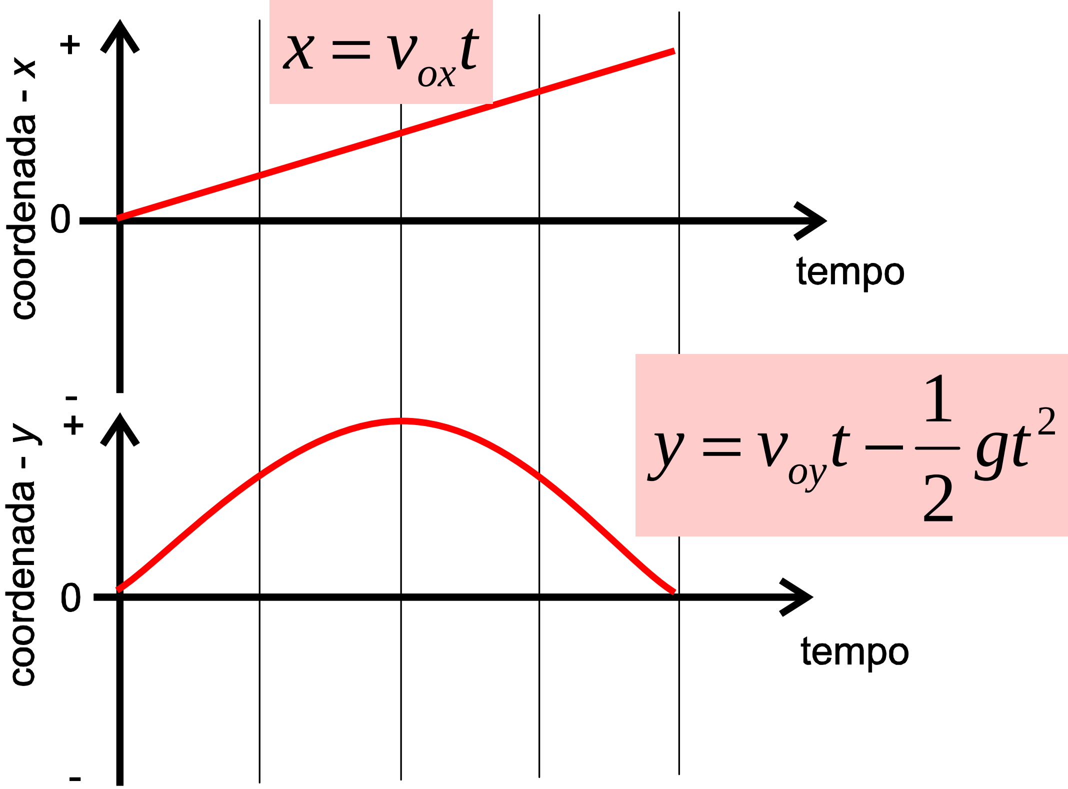
Exercício

Uma bola é lançada para o ar com velocidade inicial apontando para cima e para a direita. Esboce no sistema de eixos ao lado a sua previsão da coordenada da bola segundo o eixo dos *x* em função do tempo e da coordenada da bola segundo o eixo dos *y* em função do tempo.

Baseado no seu gráfico de *x* em função de *t*, escreva a equação que descreve a relação $x = x(t)$:

Baseado no seu gráfico de *y* em função de *t*, escreva a equação que descreve a relação $y = y(t)$:



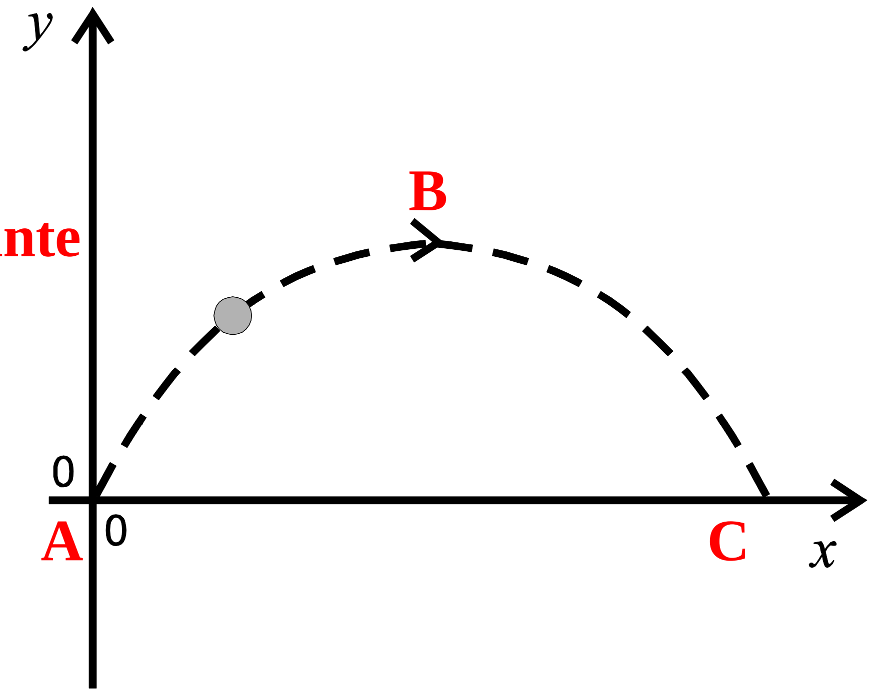


Exercício

Q1 – Em que ponto da trajectória o módulo da velocidade é máximo? E mínimo? **A e C. B**

Q2 – Em que instante é que a componente da velocidade segundo o eixo dos x é máxima? E mínima?

É constante



Q3 – O módulo da velocidade de bola no ponto mais alto da trajectória é nulo?

Não

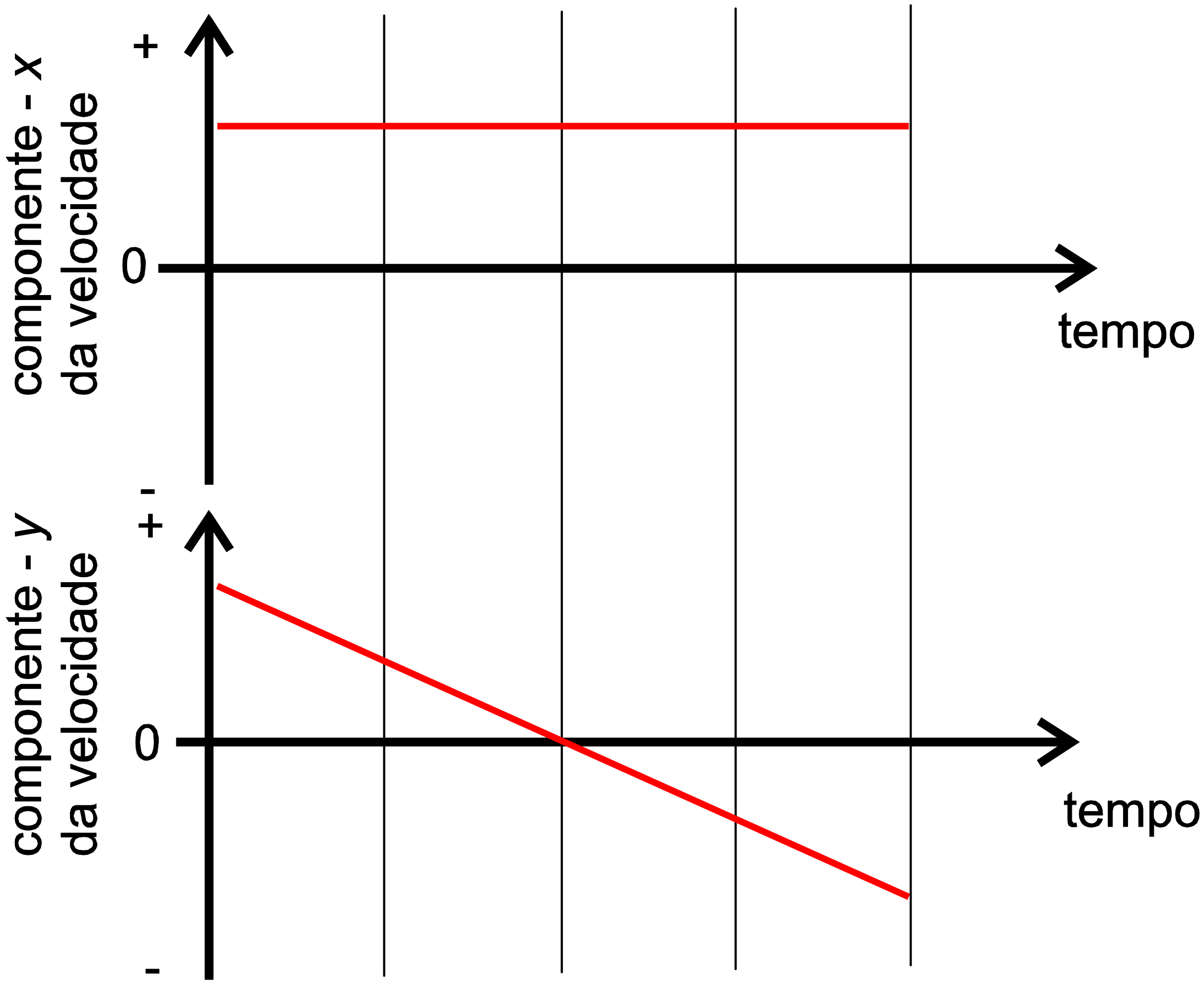
Q4 – Em que instante é que a componente da velocidade segundo o eixo dos y é máxima? E mínima?

A e C

Exercício

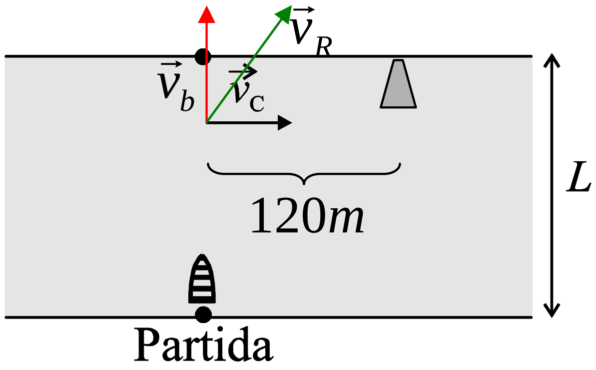
Baseado no seu gráfico de x em função de t, escreva a equação que descreve a relação $v_x = v_x(t)$:

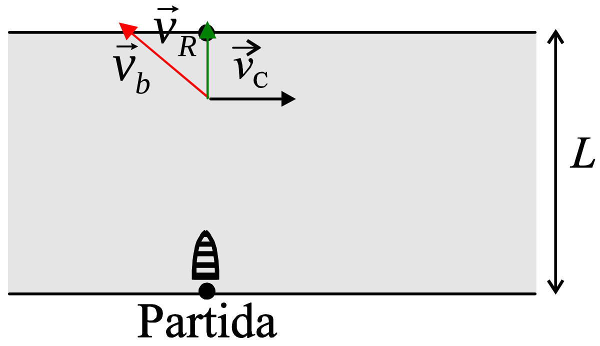
Baseado no seu gráfico de y em função de t, escreva a equação que descreve a relação $v_y = v_y(t)$:



Exercício

Um barco atravessa um rio, de largura L = 160 m, em que a corrente tem uma velocidade uniforme de 1.50 m/s. O piloto mantém a direcção em que aponta o barco perpendicular ao rio e uma velocidade constante de 2.0 m/s em relação à água.





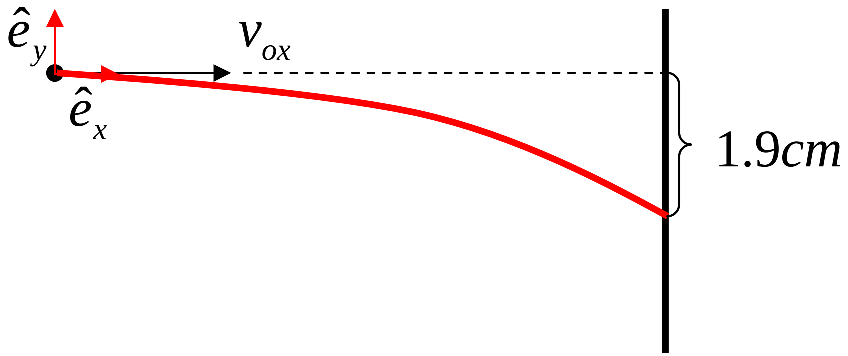
a) Qual é o módulo do vector velocidade do barco relativamente a um observador parado na margem e qual é o ângulo que faz com a vertical às margens do rio?

b) A que distância abaixo da posição inicial, no sentido da corrente, está o barco quando atinge a margem oposta?

c) Obtenha graficamente, na figura da direita, o vector velocidade que o barco deveria ter para que atingisse a outra margem no ponto verticalmente oposto ao da partida, em relação às margens.

Movimento a duas e três dimensões

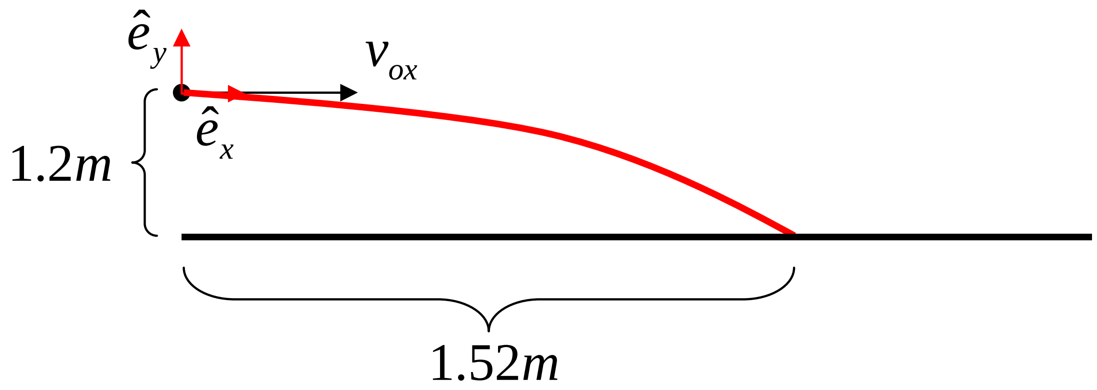
Uma carabina é apontada na horizontal para um alvo distante 30 m. A bala acerta o alvo a 1,9 cm abaixo do ponto visado. Quais são (a) o tempo de voo da bala? (b) o módulo da sua velocidade ao sair da carabina? (R: 62 ms; 487 m/s)



No instante do impacto,

$$\begin{cases} 30 = v_{ox} t \\ -1.9\times 10^{-2} = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

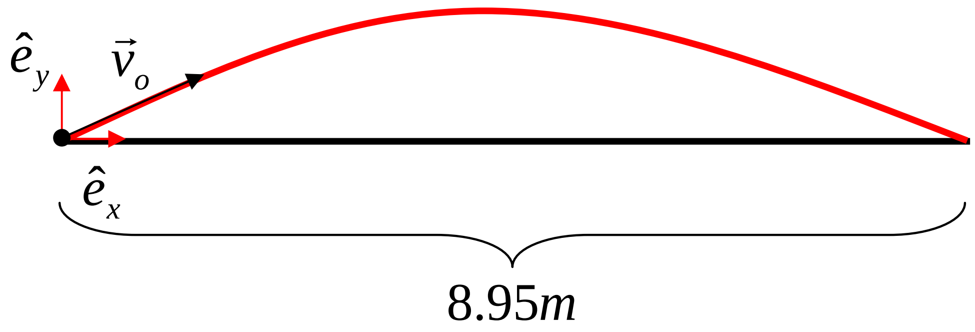
Uma bola rola horizontalmente para fora do tampo de uma mesa de altura 1,2 m. Ela toca o chão a uma distância de 1,52 m da extremidade da mesa medida na horizontal. (a) Quanto tempo fica a bola no ar? (b) Qual a velocidade escalar no instante em que ela sai da mesa? (R: 0,50 s; 3,1 m/s)



No instante do impacto,

$$\begin{cases} 1.52 = v_{ox} t \\ -1.2 = -\dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Nos Campeonatos Mundiais de Atletismo de Pista e de Campo de 1991 em Tóquio, Mike Powell saltou 8,95 m, batendo o recorde 23 anos do salto em distância estabelecido por Bob Beamon por 5 cm. Suponha que a velocidade de Powell ao sair do chão foi de 9,5 m/s (quase igual à de um velocista) e que g=9,80 m/s^2 em Tóquio. De quanto é que o alcance horizontal de Powell era menor que o máximo possível para uma partícula com a mesma velocidade escalar de 9,5 m/s. (0,26 m)

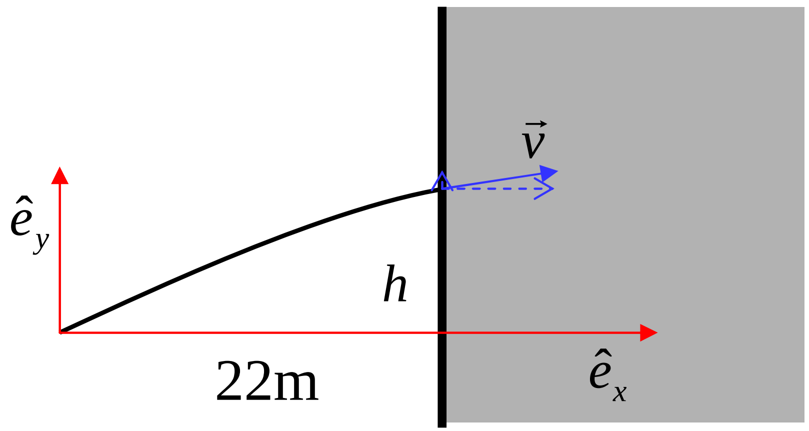


i.e. O ângulo que garante o alcance máximo para o salto é de 45º, e nesse caso o alcance seria,

$$R_{\max} = \frac{v_o^2}{g} = 9.02m$$

Pelo que Mike Powell ficou 7cm aquém do máximo possível, para a velocidade que tinha antes do salto.

Você arremessa uma bola em direcção a uma parede com uma velocidade de 25,0 m/s fazendo um ângulo de 40,0 º acima da horizontal. A parede está a 22,0 m do ponto de lançamento da bola. (a) A que distância acima do ponto de lançamento a bola bate na parede? (b) Quais as componentes horizontal e vertical da sua velocidade quando ela bate na parede? (c) Quando ela bate, ela já passou do ponto mais alto da sua trajectória? (R: 11.86m; 19,2u_x+4,58 u_y; Não, pois a componente da velocidade na direcção vertical é positiva.)



No instante do impacto,

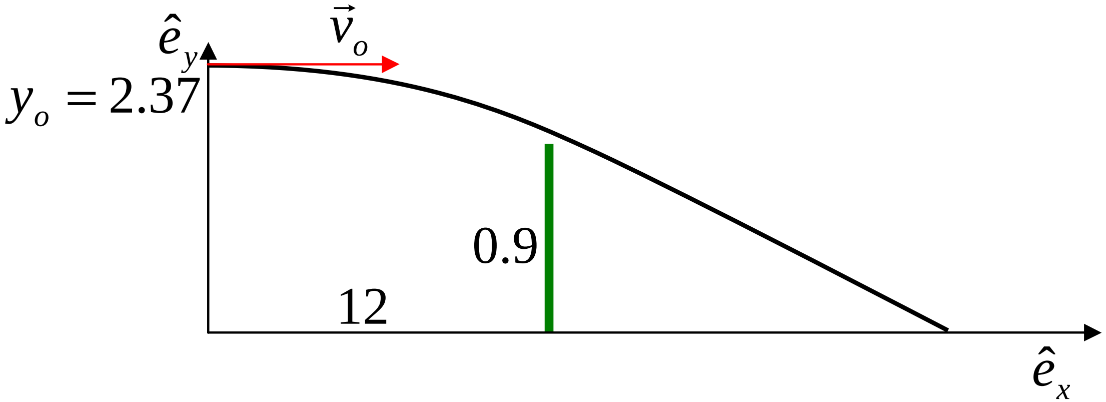
Eq. dos espaços

$$\begin{cases} 22 = v_o \cos(\theta) t \\ h = v_o \sin(\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} t = 1.15 s \\ h = 11.86 m \end{cases}$$

Eq. das velocidades

$$\begin{cases} v_{ox} = 25 \cos(\theta) = 19.2 \\ v_{oy} = 25 \sin(\theta) - gt = 4.58 \end{cases}$$

Durante uma partida de ténis um jogador serve a bola a 250 km/h, com o centro da bola deixando a raquete horizontalmente a 2,37 m acima da superfície da quadra. A rede está afastada 12 m e tem 0,90 m de altura. Quando a bola alcança a rede (a) ela consegue passar sem tocá-la? (b) Qual a distância entre o centro da bola e o alto da rede? (c e d) Suponha agora que a bola sai da raquete fazendo um ângulo de 5º abaixo da horizontal. Responda ás questões (a) e (b) nestas circunstâncias. (+132 cm; +27 cm)



No instante de passagem,

Eq. dos espaços: θ=0º

$$\begin{cases} 12 = v_o t \\ h = y_o - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \begin{cases} t = 0.173 s \\ h = 2.22 m \end{cases}$$

Portanto, passa a 132 cm acima da rede

Eq. dos espaços: θ=5º

$$\begin{cases} 12 = v_o \cos(\theta) t \\ h = y_o - v_o \sin(\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \begin{cases} t = 0.173 s \\ h = 1.17 m \end{cases}$$

A bola passa 27 cm acima da rede

Questão

Questão nº 7

Uma partícula desloca-se no plano xy com aceleração constante. No instante zero, a partícula está na posição $x = 4$m, $y = 3$m e tem velocidade $\vec{v} = (2\ m/s)\vec{i} + (-9\ m/s)\vec{j}$. A aceleração é dada por $\vec{a} = (4\ m/s^2)\vec{i} + (3\ m/s^2)\vec{j}$.

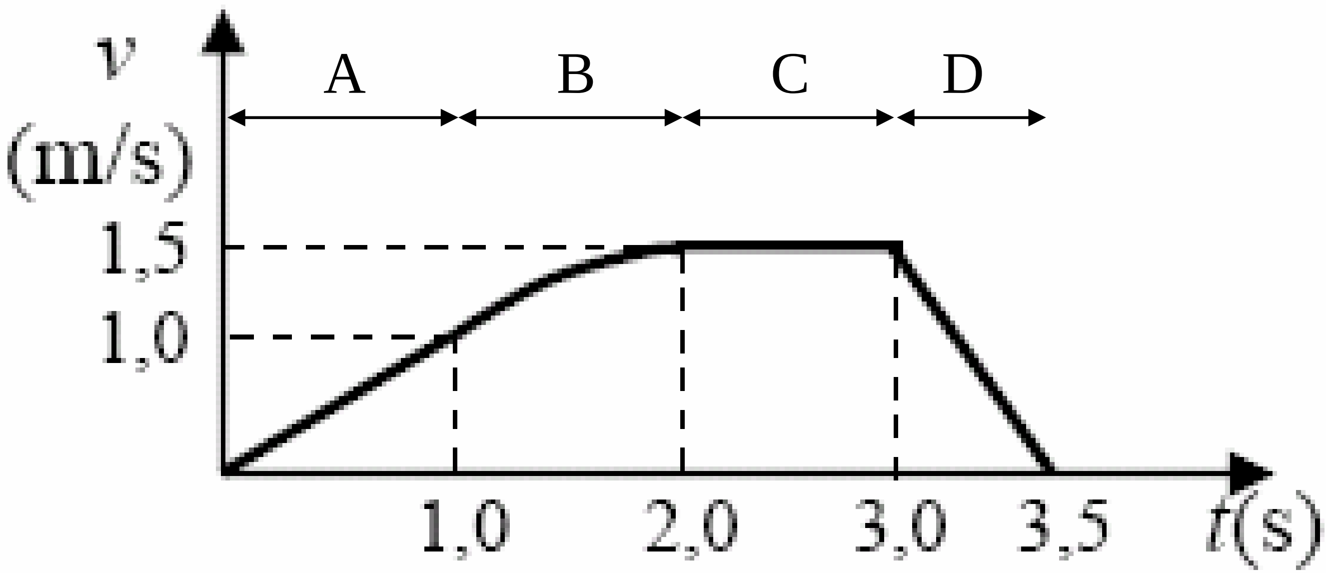
a) Determine a velocidade no instante t = 2s.
b) Qual a posição em t = 4s. Indique o valor e a direcção do vector posição.

$$\begin{cases} v_x = 2 + 4t \\ v_y = -9 + 3t \end{cases} ; t = 2 \Rightarrow \begin{cases} v_x = 10 \\ v_y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 + 2t + \dfrac{4t^2}{2} \\ y = 3 - 9t + \dfrac{3t^2}{2} \end{cases} ; t = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

Questão

A figura apresenta o gráfico da velocidade em função do tempo de uma partícula em movimento rectilíneo. a) Em que intervalo de tempo a aceleração é constante e positiva?; b) Em que intervalo de tempo a aceleração é constante e negativa?; c) Em que intervalo de tempo a aceleração é variável no tempo?; d) Em que intervalo de tempo, a força que se exerce sobre a partícula tem maior valor absoluto?



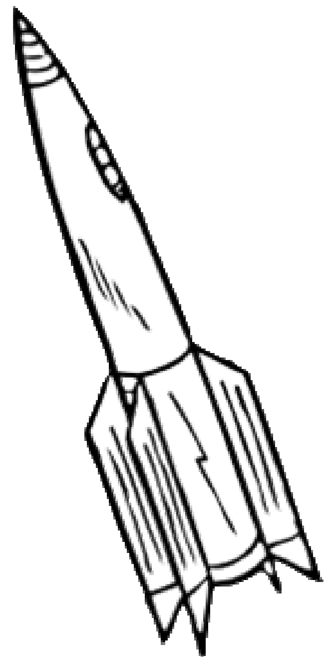
a) A: b) D; c) B; d) D

Aula 5-6 - Força e Movimento I. As três Leis de Newton.

1. A 1ª Lei de Newton

2. A 2ª Lei de Newton. Força e Massa.

3. A 3ª Lei de Newton



1ª Lei de Newton ou Lei da Inércia

Na presença de uma **Força Resultante nula** todos os corpos tendem a manter o seu movimento.

1. Estando o corpo em repouso, permanecerá em repouso.
2. Se estiver em movimento, continuará em movimento rectilíneo e uniforme.

MAS,

Se a FORÇA RESULTANTE não é nula, então o **vector** velocidade do corpo terá necessariamente que variar.

2ª Lei de Newton

O produto da massa pela vector aceleração de um corpo é igual á **resultante das forças**, i.e.,

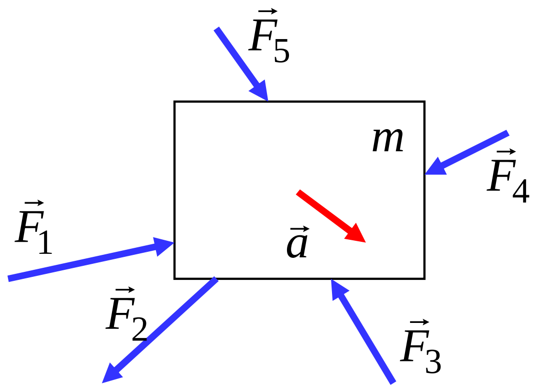
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Esta é uma **equação vectorial** e por isso compreende um sistema de três equações escalares:

$$\sum F_x = ma_x$$

$$\sum F_y = ma_y$$

$$\sum F_z = ma_z$$



NOTA: existem VÁRIAS forças aplicadas no corpo mas o corpo tem apenas UMA aceleração

A massa ***m*** de um corpo é uma **quantidade escalar** e relaciona as forças aplicadas com a aceleração de um corpo.

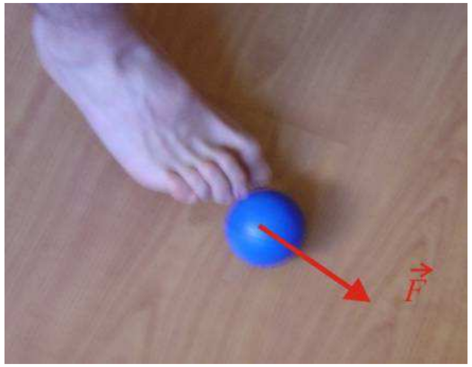
As Forças de Contacto

Exemplos de **<u>interacções de contacto</u>**:

Força exercida pela mesa num monitor de computador, e que o impede de cair;

Força exercida pela mão numa porta e que provoca o movimento desta;

Força exercida pelo pé numa bola e que a faz mover.

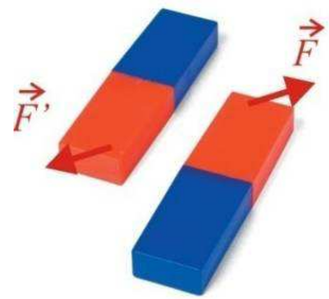


As Forças de Campo

Mas não é necessário que exista proximidade entre os corpos.

Exemplos de **<u>interacções à distância</u>**:

Força exercida pela Terra num corpo e que o faz cair;



Força entre dois ímanes que se encontram próximos um do outro, mas não encostados, e que os faz aproximarem-se ou afastarem-se um do outro;

Classes de Força

As forças de contacto exigem contacto físico entre dois corpos

As forças de campo actuam através do espaço vazio

Não é exigido contacto físico

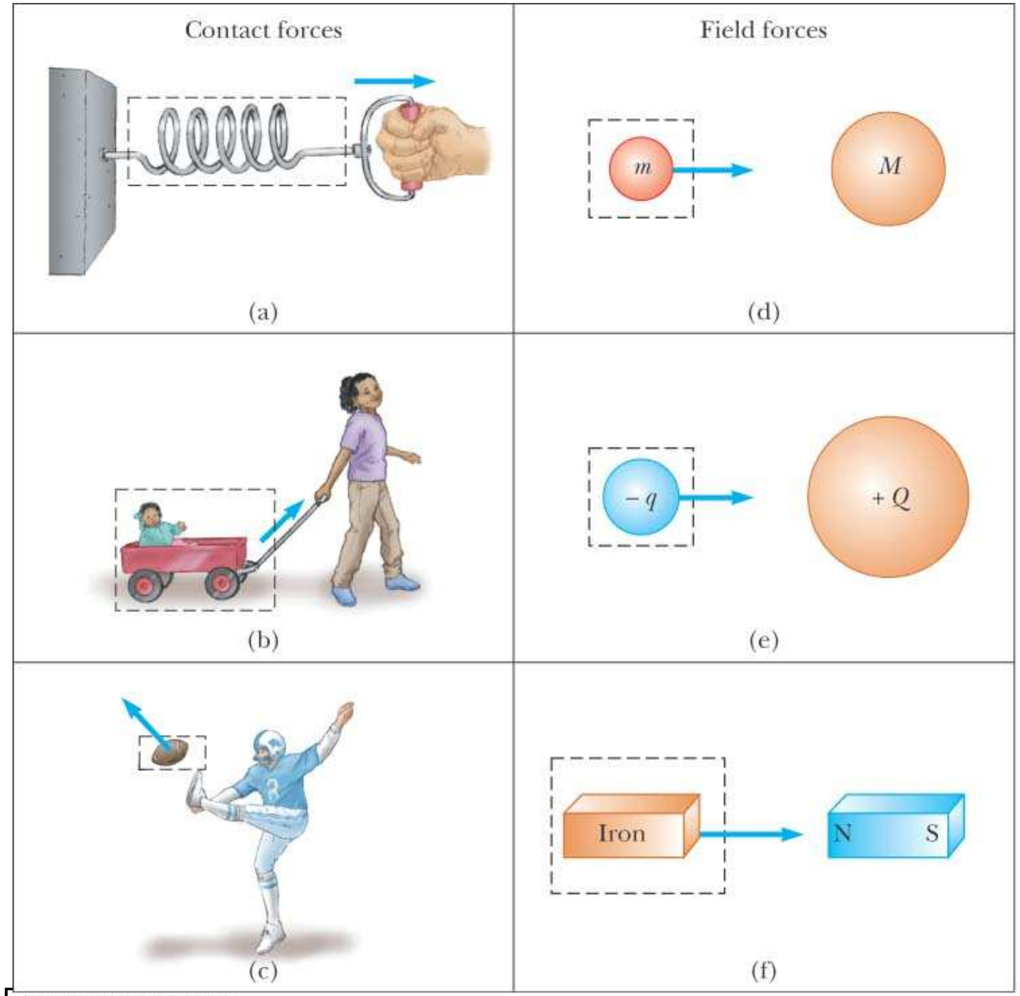
Forças Internas e Externas

SISTEMA é um conjunto de dois ou mais corpos.

FORÇAS INTERNAS são forças de interacção entre corpos de um mesmo sistema.

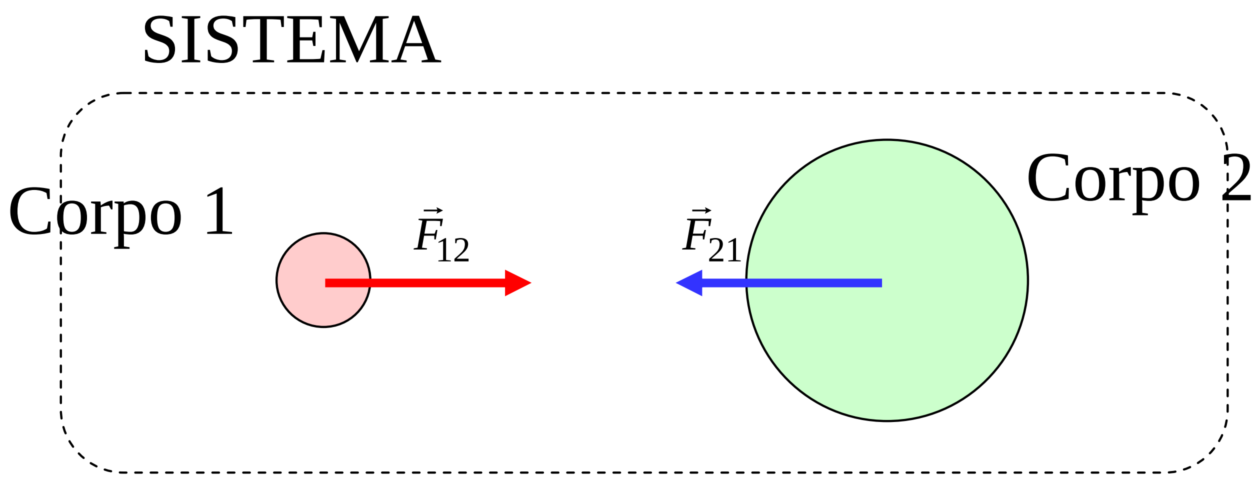
FORÇAS EXTERNAS são forças aplicadas por corpos externos ao sistema.

Exemplos de forças externas



3ª Lei de Newton

Para cada **força de acção** aplicada no corpo 1 pelo corpo 2, existe uma **força de reacção** aplicada no corpo 2 pelo corpo 1 igual e oposta.



Estas forças tomam o nome de **par acção-reacção**.

MUITA ATENÇÃO: as forças $\mathbf{F}_{21}$ e $\mathbf{F}_{12}$ <u>têm pontos de aplicação diferentes</u>.

Diagrama do corpo livre e a 3ª Lei de Newton

Consiste em isolar no espaço o corpo que nos interessa substituindo por forças, as interacções e ligações com os outros corpos, pela aplicação sucessiva da Terceira Lei de Newton.

É, em regra, a primeira fase da resolução de um problema de Mecânica.

Vamos isolar o livro assente sobre a mesa?

Situação inicial

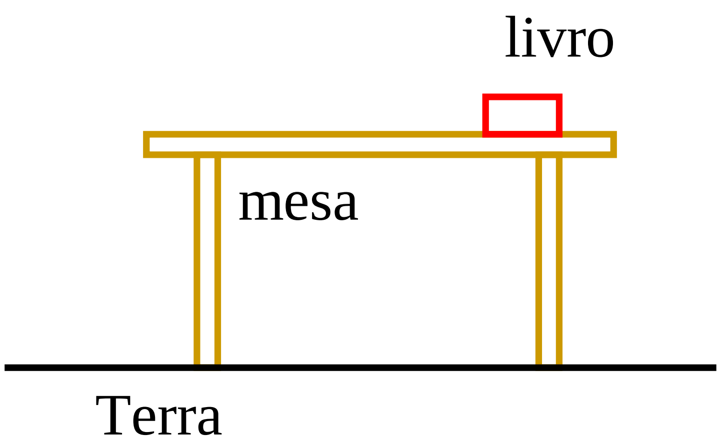
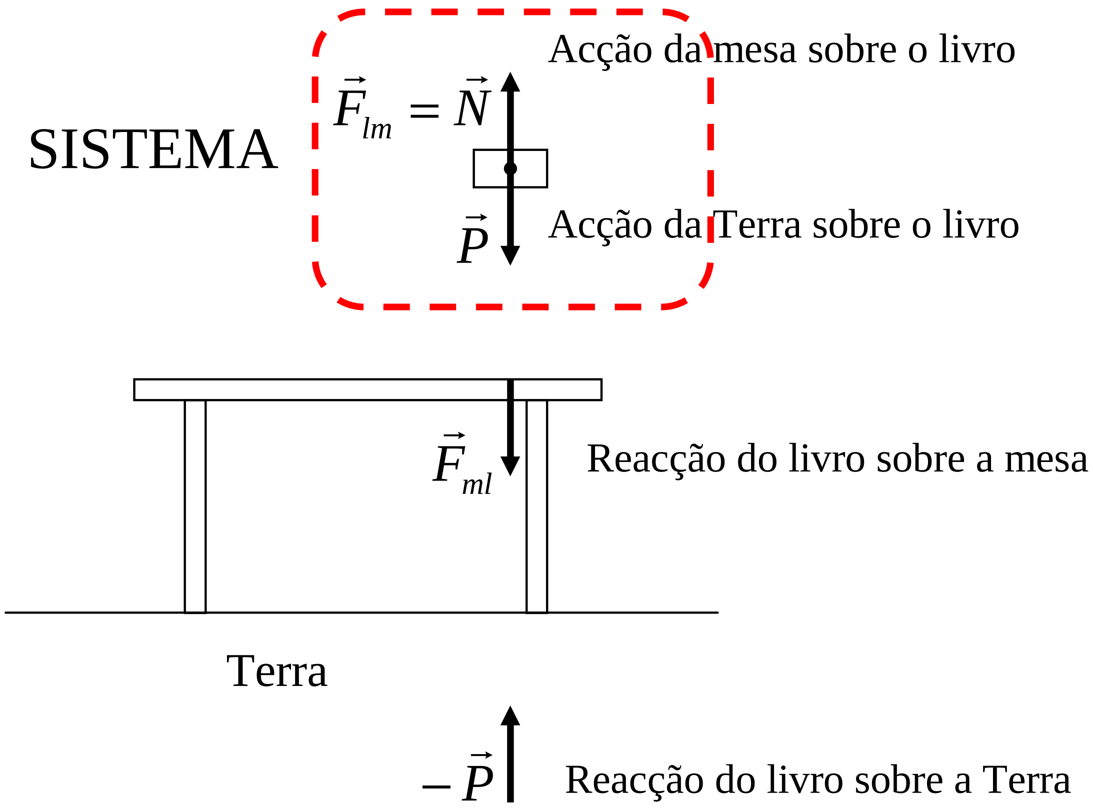


Diagrama do corpo livre

Situação final

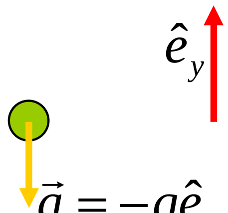
Diagrama do corpo livre do livro



Qual a resultante das forças aplicadas ao livro? $\vec{N} + \vec{P}$

Força Gravitacional

Um corpo abandonado de uma altura h, acima da superfície terrestre cai em direcção à Terra com a aceleração da gravidade. Porquê?



$\hat{e}_y$

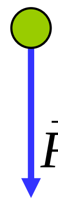
$\vec{a} = -g\hat{e}_y$

Vamos aplicar a Segunda Lei de Newton,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$= -mg\hat{e}_y$$

Mas, como em queda livre só existe uma força aplicada que é a da gravidade,

$$\vec{F}_g = -mg\hat{e}_y$$



$\vec{F}_g = -mg\hat{e}_y$

O Peso

O peso é a força de acção do tipo Gravitacional aplicada pela Terra sobre o corpo.

Podemos considerar que está aplicada no centro de massa do corpo, e orientada no sentido do centro de massa da Terra.

O seu módulo é ***mg***.

Consequências:

O peso varia consoante o local porque depende de g

O peso não é, portanto, uma propriedade intrínseca de um corpo

A Reacção Normal não é sempre igual ao Peso

Existem **três** forças aplicadas no livro,

$\hat{e}_y$

Acção da mão

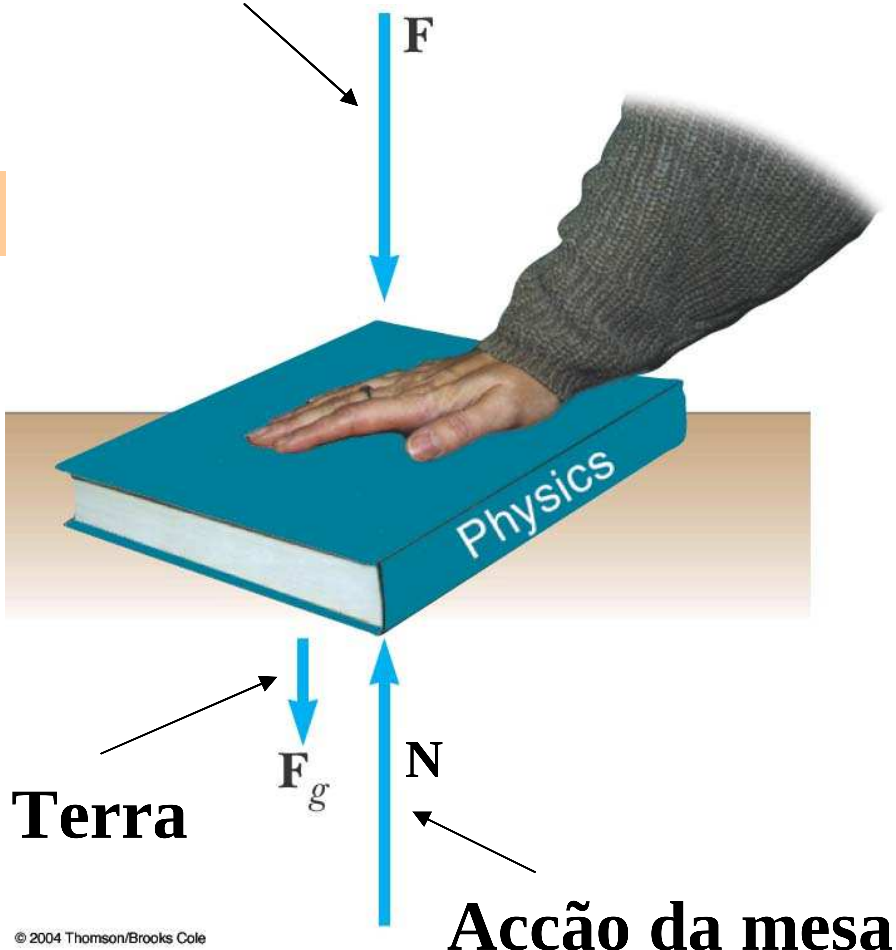
A resultante na direcção $\mathbf{e}_y$

$$-F - F_g + N = 0$$

Porquê?

$$N = F + F_g$$

$$\boxed{N > F_g}$$

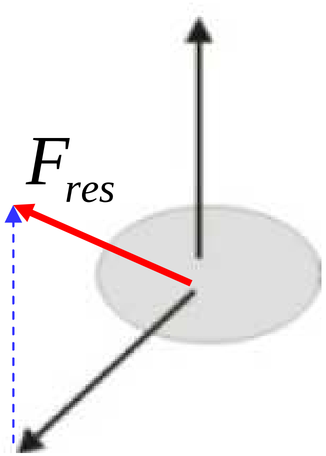


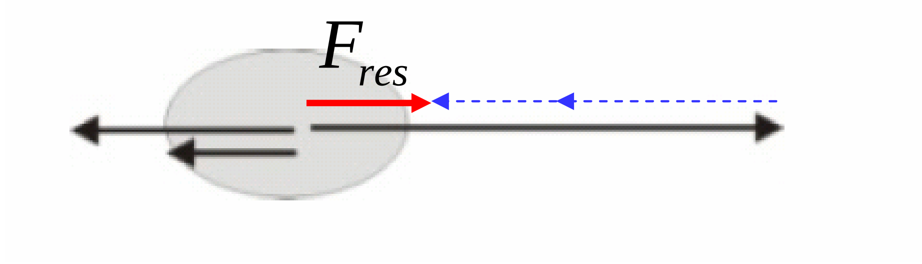
Acção da Terra

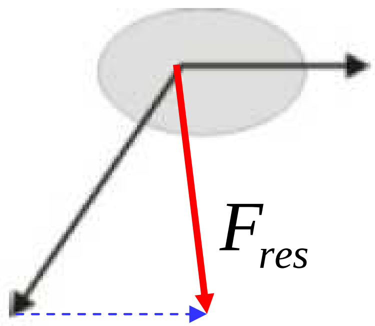
Acção da mesa

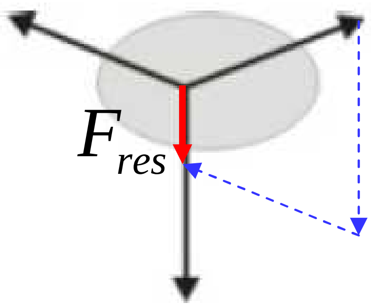
Exercícios

Duas ou mais forças estão aplicadas aos corpos em cada uma das situações abaixo. Desenhe, em cada caso, o vector força resultante





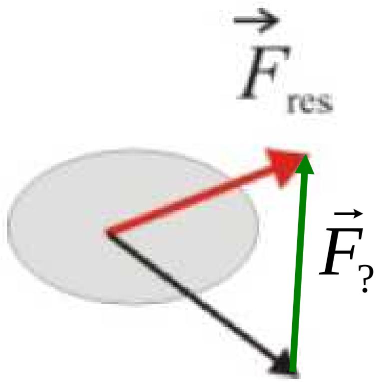


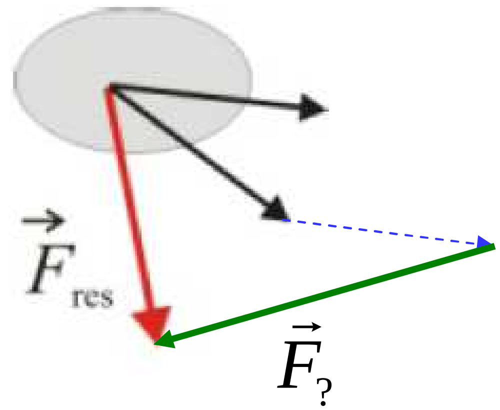


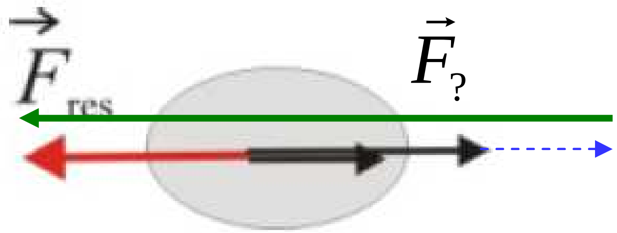
Exercício

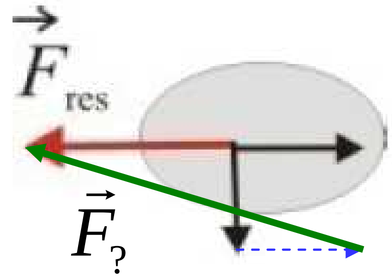
Duas ou mais forças estão aplicadas aos corpos em cada uma das situações abaixo. Em cada um dos diagramas estão representadas as forças aplicadas, **menos uma,** e a força resultante. Desenhe, em cada caso, a força que falta.

$$\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) + \vec{F}_? = \vec{F}_{res}$$





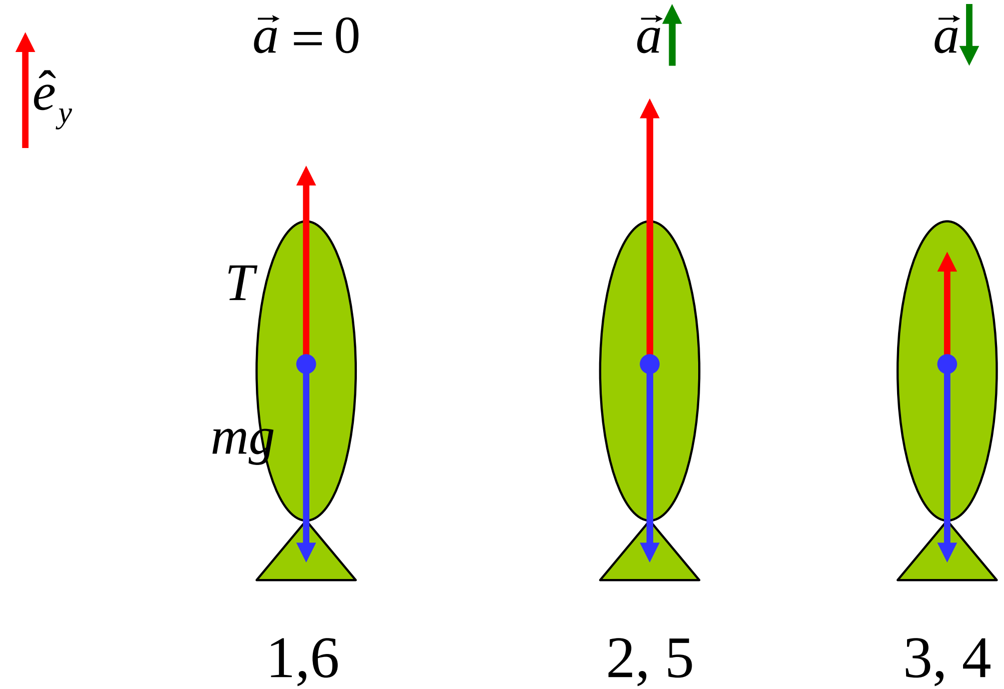




Exercício

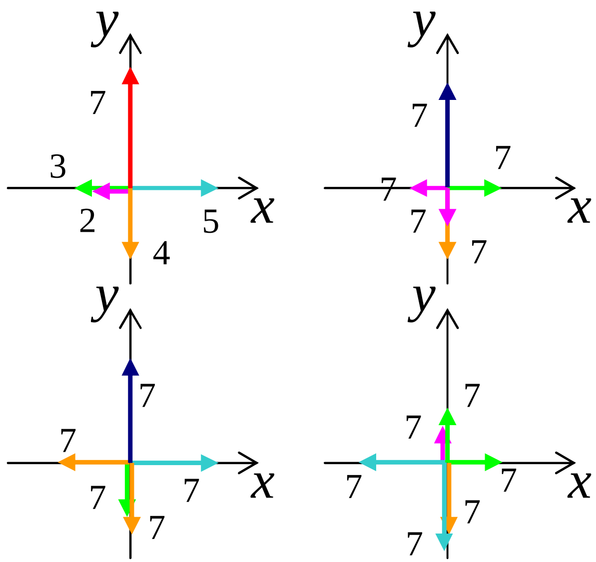
Desenhe o diagrama de forças exercidas no peixe da figura,

1. Quando o elevador está em repouso
2. Quando elevador está a subir com velocidade de módulo crescente
3. Quando o elevador está a descer com velocidade de módulo crescente
4. Quando elevador está a subir com velocidade de módulo decrescente
5. Quando o elevador está a descer com velocidade de módulo decrescente
6. Quando o elevador está a descer com velocidade constante



$$T - mg = ma_y$$

Actividade 6

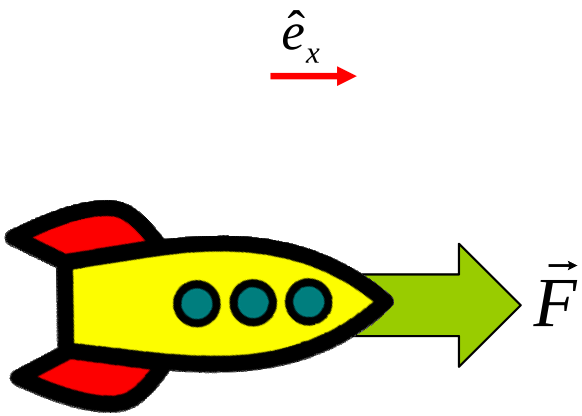


Aplicação das Leis de Newton em 1D e em 2D

Resolução de um problema de Dinâmica

1. **Fazer o diagrama livre de cada um dos corpos assinalando as forças externas aplicadas a cada um deles.**
2. **Arbitrar um sistema de eixos apropriado para cada um dos corpos**
3. **Escrever a 2ª Lei de Newton na forma escalar**
4. **Estabelecer as <u>relações auxiliares</u> de movimento e de forças entre os diversos corpos.**
5. **Resolver a equação ou sistema de equações.**

Um trenó-foguete experimental pode ser acelerado a uma taxa constante partindo do repouso até atingir 1600 km/h em 1,8 s. Qual é o módulo da força resultante necessária se o trenó possuir uma massa de 500 kg.



$$F = ma$$
$$= m\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = 500\,\frac{444-0}{1.8}$$
$$= 123\,kN$$

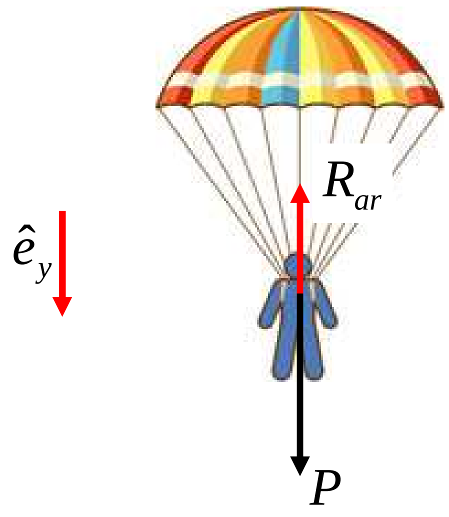
<u>Conversão de unidades</u>:

$$1600\,\frac{km}{h} = 1600\,\frac{1000\times m}{3600\times s} = 1600\,\frac{1}{3.6}\,\frac{m}{s} = 444\,m/s$$

Uma pessoa de 80 kg salta de pára-quedas e sentindo uma aceleração de 2,5 m/s^2. A massa do pára-quedas é de 5,0 kg.

(a) Qual é a força para cima que o ar exerce sobre o pára-quedas aberto?

(b) Qual a força para baixo que a pessoa exerce sobre o pára-quedas?



Nota: O sistema é constituído pelo conjunto da pessoa e do pára-quedas.

$$P - R_{ar} = (M + m)a$$

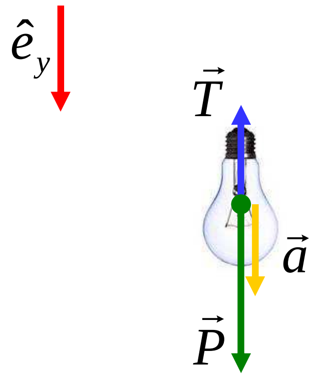
$$\Rightarrow R_{ar} = (M + m)g - (M + m)a = (M + m)(g - a)$$

$$R_{ar} = 6.38 \times 10^2 \ N$$

Uma lâmpada está suspensa na vertical por um fio num elevador que no inicio da descida tem uma aceleração de 2,4 m/s^2 (para baixo). (a) Se a tracção no fio é de 8.9 N, qual é a massa da lâmpada? (b) Qual será a tracção no fio quando o elevador subir com uma aceleração para cima de 2,4 m/s^2?

a)

I) Diagrama do corpo livre

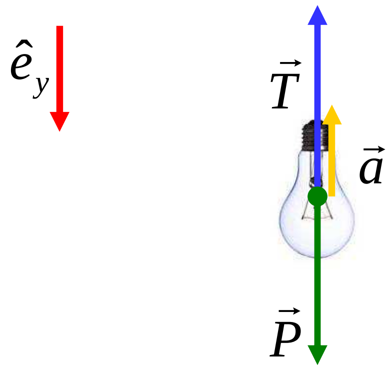


II) Aplicação da 2ª Lei

$$mg - T = ma \Rightarrow m = 1.2kg$$

b)

I) Diagrama do corpo livre



II) Aplicação da 2ª Lei

$$mg - T = m(-a) \Rightarrow T = 14.7N$$

Equação do movimento num plano inclinado

Qual a aceleração do carro?

Simplificações:

1. Sem atrito
2. A massa das rodas é desprezável

II) Aplicação da 2ª Lei

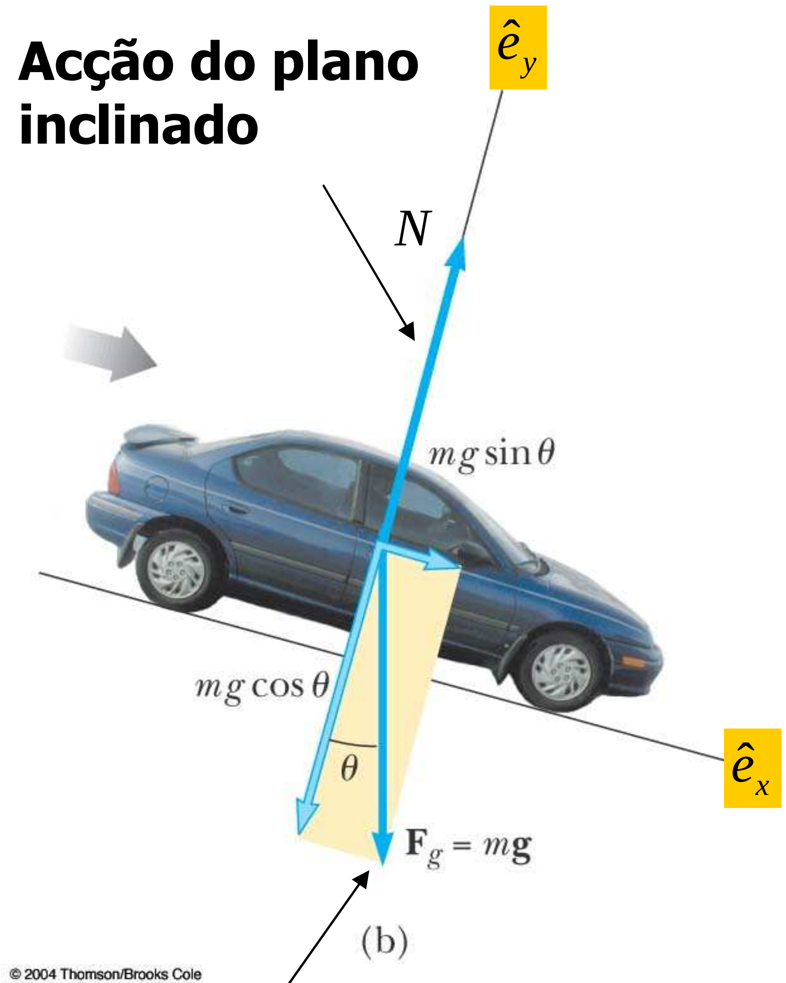
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{N} + \vec{F}_g = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \begin{cases} mg\sin(\theta) = ma_x \\ N - mg\cos(\theta) = 0 \end{cases}$$

Solução $\begin{cases} a_x = g\sin(\theta) \\ a_y = 0 \end{cases}$

I) Diagrama do corpo livre

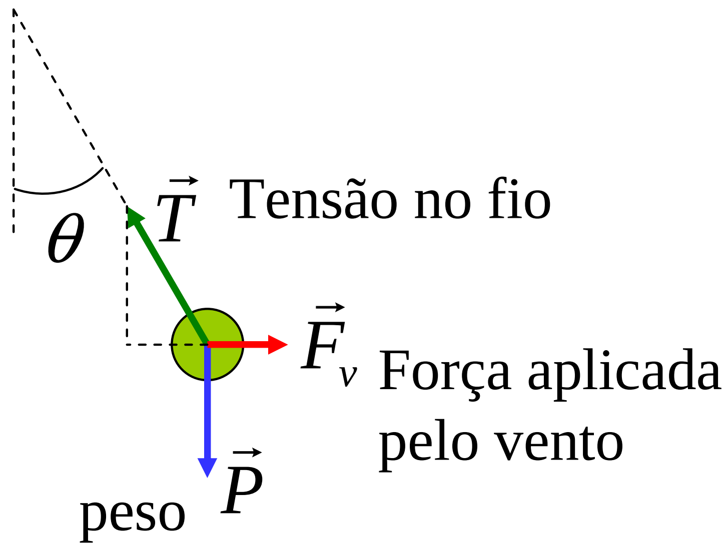
Acção do plano inclinado



Acção da Terra

Uma esfera de massa 3,0 x10^{-4} kg está suspensa por um fio. Uma brisa sopra ininterruptamente na direcção horizontal empurrando a esfera de tal forma que o fio faz um ângulo constante de 37º com a vertical. Determine (a) o módulo daquele empurrão e, (b) a tracção no fio.

I) Diagrama do corpo livre



II) Aplicação da 2ª Lei

Se o corpo está em equilíbrio o somatório das forças é nulo. Então,

$$\tan(\theta) = \frac{F_v}{P}$$

$$F_v = mg\tan(\theta)$$
$$= 2.2\ mN$$

b)

$$T\cos(\theta) = P$$
$$T = 3.6mN$$

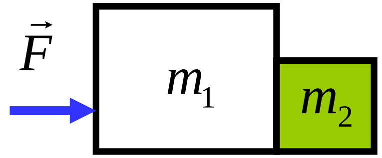
Força e Movimento I

Dois blocos estão em contacto sobre uma mesa sem atrito. Uma força horizontal é aplicada ao bloco maior, como se mostra na figura.

(a) Se m_1= 2,3 kg, m_2= 1,2 kg e F=3,2 N, determine o módulo da força entre os dois blocos.

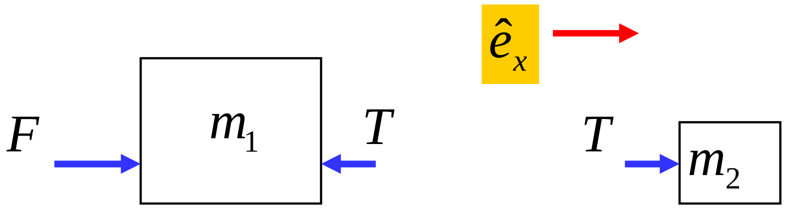
(b) Mostre que, se a força for aplicada no sentido contrario mas no bloco menor, a força entre os dois blocos é 2,1 N e portanto diferente do calculado na alínea anterior.

(c) Explique a diferença.



(a)

I) Diagrama do corpo livre para cada corpo

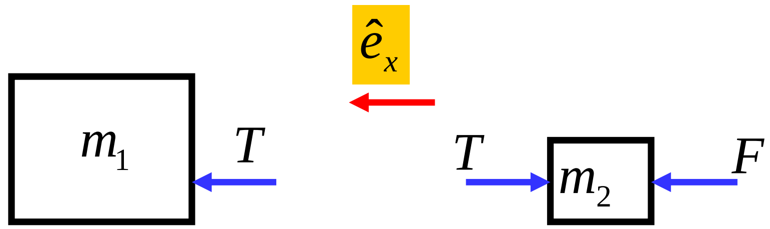


II) Aplicação da 2ª Lei para cada corpo

$$\begin{cases} F - T = m_1 a \\ T = m_2 a \end{cases} \quad \begin{cases} a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} = 0.91 m/s^2 \\ T = \dfrac{F m_2}{m_1 + m_2} = 1.1 N \end{cases}$$

(b)

Diagrama do corpo livre para cada corpo, com a força F aplicada no corpo 2.



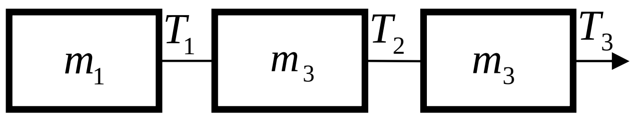
Aplicação da 2ª Lei a cada corpo e resolução do sistema

$$\begin{cases} F - T = m_2 a \\ T = m_1 a \end{cases} \quad \begin{cases} a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} = 0.91 m/s^2 \\ T = \dfrac{F m_1}{m_1 + m_2} = 2.1 N \end{cases}$$

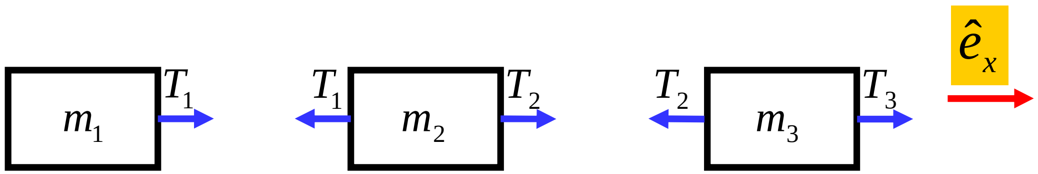
Com efeito <u>a aceleração do sistema é igual</u> mas a tensão no fio é diferente.

Força e Movimento I

Na figura, três blocos estão ligados e são puxados para a direita sobre uma mesa horizontal sem atrito por uma força com um módulo de T_3=65,0 N. Se m_1= 12,0 kg, m_2= 24,0 kg, m_3= 31,0 kg, calcule (a) a aceleração do sistema e as tracções (b) T_1 e (c) T_2 nos fios de ligação entre os blocos.



I) Diagrama do corpo livre para cada corpo



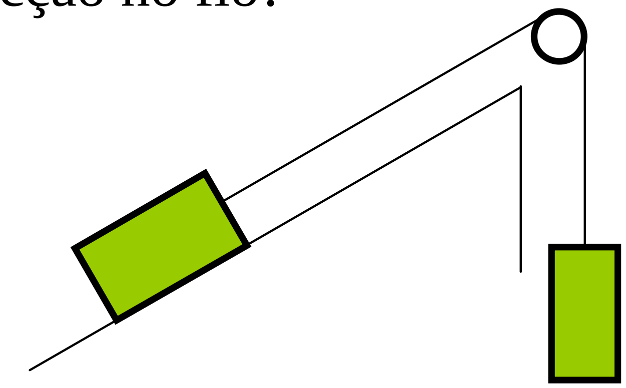
II) Aplicação da 2ª Lei a cada corpo

$$\begin{cases} T_3 - T_2 = m_3 a \\ T_2 - T_1 = m_2 a \\ T_1 = m_1 a \end{cases}$$

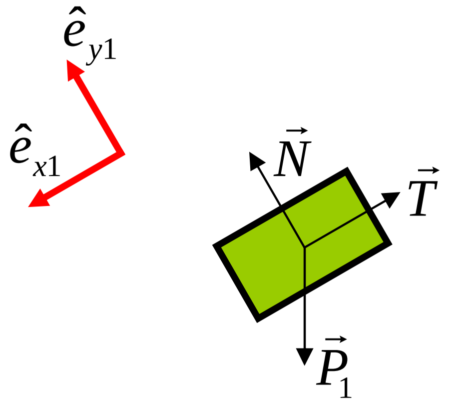
III) Solução

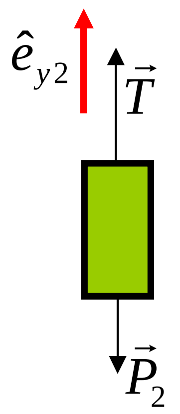
$$\begin{cases} a = \dfrac{T_3}{m_3 + m_2 + m_1} = 0.97\, m/s^2 \\ T_2 = \dfrac{(m_1 + m_2)T_3}{m_3 + m_2 + m_1} = 34.9 N \\ T_1 = \dfrac{m_1 T_3}{m_3 + m_2 + m_1} = 11.6 N \end{cases}$$

Um bloco de massa m_1= 3,7 kg, sobre um plano inclinado de 30,0º está ligado por um fio que passa por uma roldana sem massa e sem atrito a um segundo bloco de massa m_2= 2,30 kg, suspenso verticalmente (ver figura). Quais são (a) o módulo da aceleração de cada bloco e (b) a direcção e sentido da aceleração do bloco suspenso? (c) Qual é a tracção no fio?



I) Diagrama do corpo livre para cada corpo





II) Aplicação da 2ª Lei a cada corpo

$$\begin{cases} m_1 g \sin(\theta) - T = m_1 a \\ N - m_2 g \cos(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$T - m_2 g = m_2 a$$

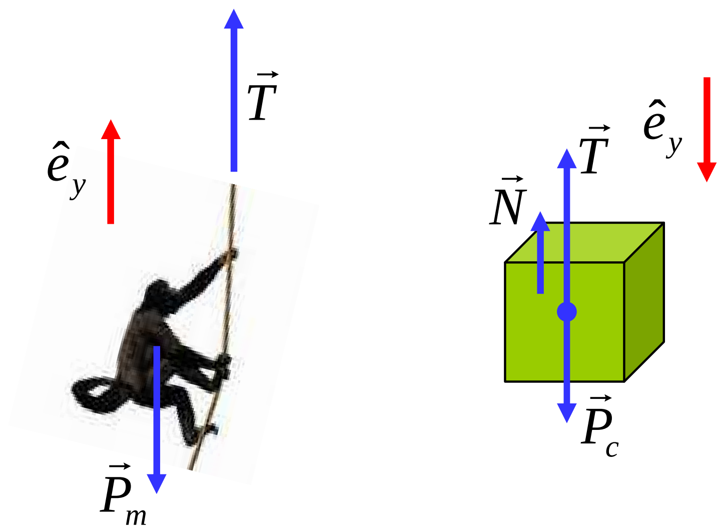
III) Solução

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_1 \sin(\theta) - m_2}{m_1 + m_2} g = -0.75\, m/s^2 \\ T = 20.8 N \end{cases}$$

NOTA: o módulo das acelerações das massas 1 e 2 é igual. Porquê?

Um macaco de 10 kg sobe por uma corda sem massa pendurada num galho de árvore. A corda está presa do outro lado num caixote de 15 kg no chão. Qual o módulo da menor aceleração que o macaco deve ter para que consiga levantar o caixote do chão? (b) Se depois do caixote ter sido levantado, o macaco parar de subir quais serão a aceleração e (c) a tracção na corda?

(a) **I) Diagramas de corpo livre**



II) Aplicação da 2ª Lei a cada corpo

$$T - m_m g = m_m a_m \qquad m_c g - T - N = 0$$

III) Solução

Para que o caixote não se movimente (i.e. a_c=0) e como o valor mínimo de N é zero, o valor máximo de T é m_cg. Assim,

$$a_m = \frac{m_c - m_m}{m_m} g = 0.33\, m/s^2$$

(b)

II) Aplicação da 2ª Lei a cada corpo

$$T - m_m g = m_m a \qquad m_c g - T = m_c a$$

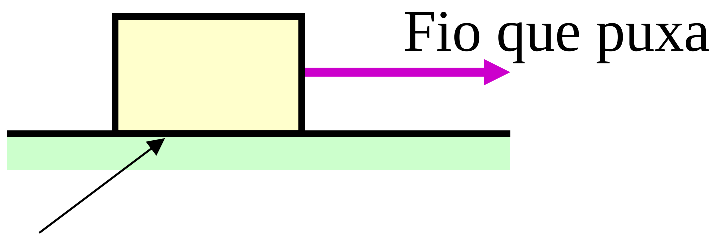
III) Solução

$$a = \frac{m_c - m_m}{m_c + m_m} g; \quad T = g \frac{2 m_m m_c}{m_c + m_m}$$

Atrito entre duas superfícies sólidas

Atrito sólido-fluido. Velocidade terminal.

Atrito sólido - sólido

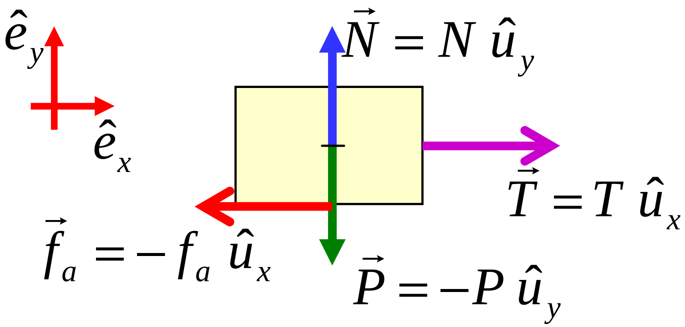


O atrito *depende* da:

1. **Natureza das superfícies** em contacto e da,
2. **Força que comprime** uma superfície contra a outra. Que nome tem esta força?

A 2ª Lei de Newton na presença do atrito.

Diagrama do corpo livre



2ª Lei de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$em\ y: \quad N - P = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$$

$$em\ x: \quad T - f_a = ma$$

- Existem quatro forças externas aplicadas.
- A força de atrito, *f* exerce-se **<u>no sentido de se opor ao movimento relativo entre as superfícies em contacto</u>**.

Em y: não existe aceleração e como o corpo em y está inicialmente em repouso vai continuar em repouso.

Em x:
<u>Se o corpo está em repouso</u> a força de atrito actua no sentido do corpo manter estado de repouso
<u>Se está em movimento</u> actua no sentido de diminuir o movimento relativo entre as superfícies.

Porque é que a força de atrito é, em módulo, sempre menor que T?

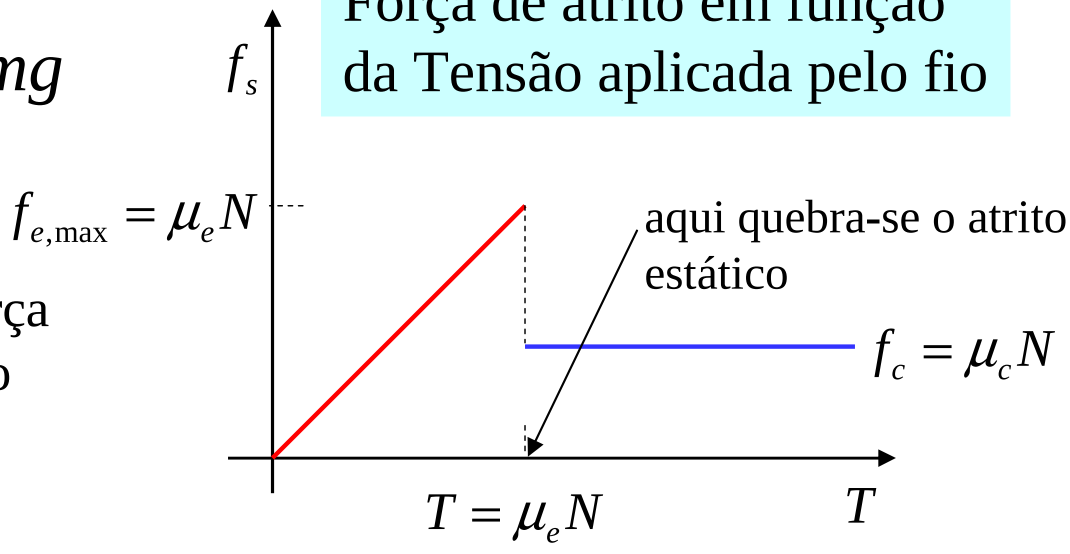
Propriedades do ATRITO ESTÁTICO

A 2ª Lei de Newton:

$$em\ y: \quad N - P = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$$

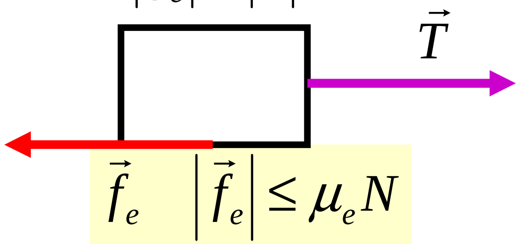
$$em\ x: \quad T - f_e = 0$$

Força de atrito em função da Tensão aplicada pelo fio



O corpo está em repouso enquanto a força de atrito equilibrar a força T aplicada no corpo pelo fio, i.e.

$$|f_e| = |T|$$



$$|\vec{f}_e| \leq \mu_e N$$

A força de atrito estático **pode ter QUALQUER VALOR desde zero até a um valor máximo** que depende:

(i) Da natureza das superfícies e

(ii) da força normal,

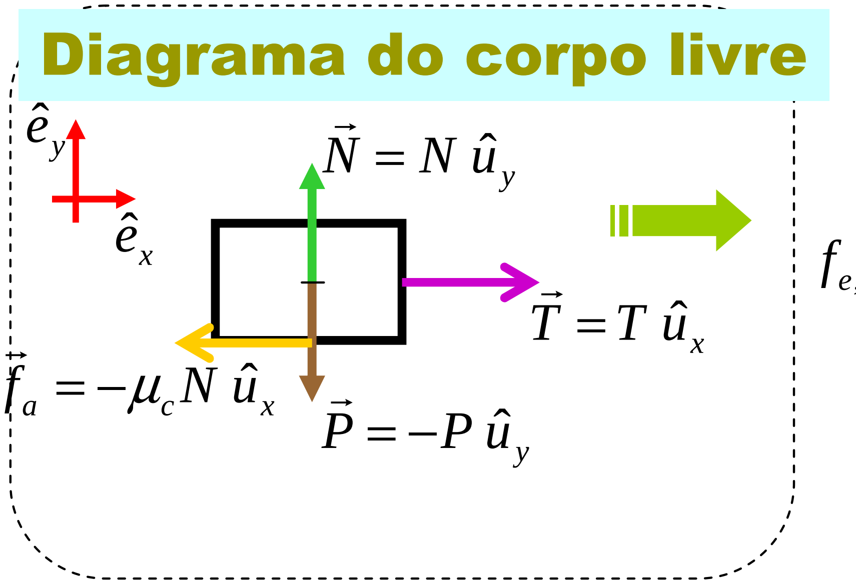
NOTA: No instante em que T>μ_eN o corpo inicia o seu movimento.

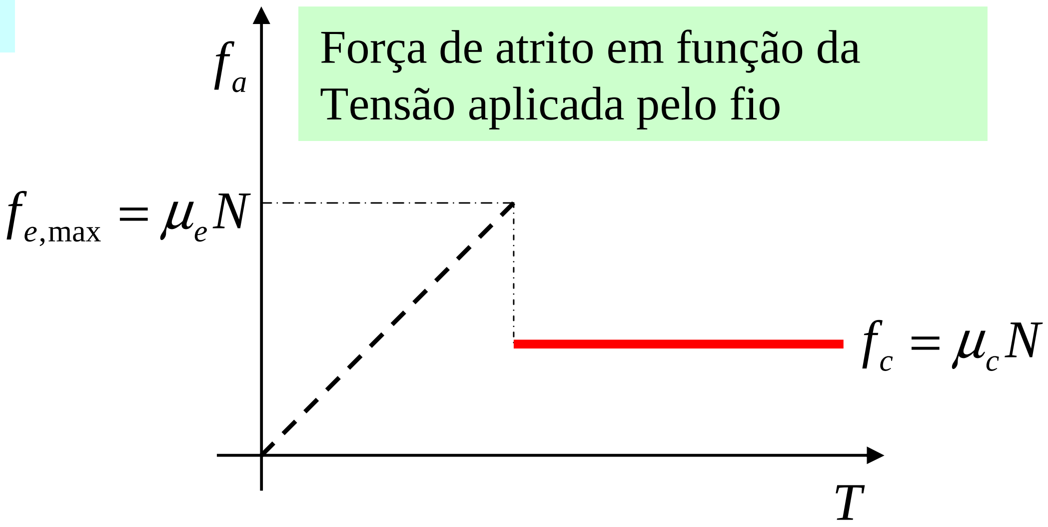
Tabela de coeficientes de atrito

Superfícies	μ_e	μ_c
Madeira sobre Madeira	0,25-0,5	0,2
Vidro sobre Vidro	0,9-1,0	0,4
Aço sobre aço, superfícies limpas	0,6	0,6
Aço sobre aço, lubrificadas	0,09	0,05
Borracha sobre betão	1,0	0,8
Teflon sobre Teflon	0,04	0,04
Juntas sinoviais no corpo humano	0.01	0.003
Gelo com gelo	0.1	0.03

Atrito cinético

Depois do corpo iniciar o seu movimento a força de atrito diminui para um valor menor e constante denominado o atrito cinético,





As equações do movimento do bloco deslizando nestas condições são,

$$em\ y: \quad N - P = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$$

$$em\ x: \quad T - f_c = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{T - \mu_c N}{m} = \frac{T - \mu_c mg}{m}$$

A força de atrito cinético mantém-se presente e constante enquanto o corpo se mantiver em movimento.

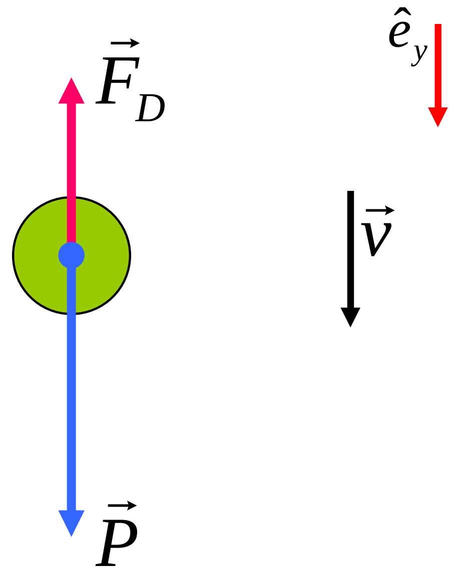
Q: O que acontece se deixarmos de aplicar a força no fio (i.e. T=0) ?

Atrito sólido - fluido

Um sólido que se desloca, no interior de um fluido, com uma velocidade **v** num **<u>escoamento do tipo turbulento</u>**, sente uma força de resistência $\mathbf{F_D}$, ***oposta*** ao movimento, proporcional ao quadrado do módulo da velocidade.

$$\vec{F}_D = -\tfrac{1}{2} C_d \rho A v^2 \ \hat{e}_t$$

Vector unitário tangencial á velocidade

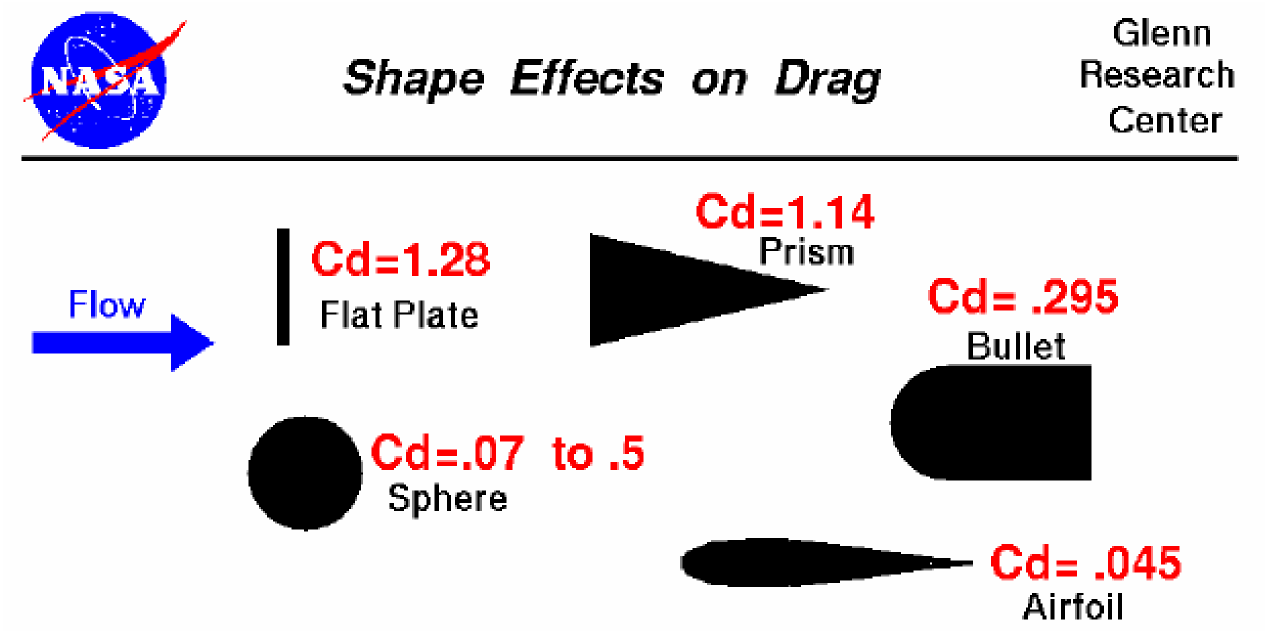


F_D é a força de resistência do ar
C_d é o coeficiente de arrasto (drag coefficient).
ρ é a massa específica do fluido (exemplo: ar)
A é a área da secção transversal efectiva
v é a velocidade relativa entre o sólido e o fluido

Verifique que C_d é uma grandeza adimensional.

Coeficiente de arrasto e a forma dos objectos

OBJECTO	C_d
Corpo aerodinâmico	0.1
Carro desportivo	0.2 - 0.3
Esfera	0.47
Carro (típico)	0.5
Station Wagon	0.6
Cilindro	0.7-1.3
Ciclista	0.9
Camião	0.8 - 1.0
Motociclista	1.8



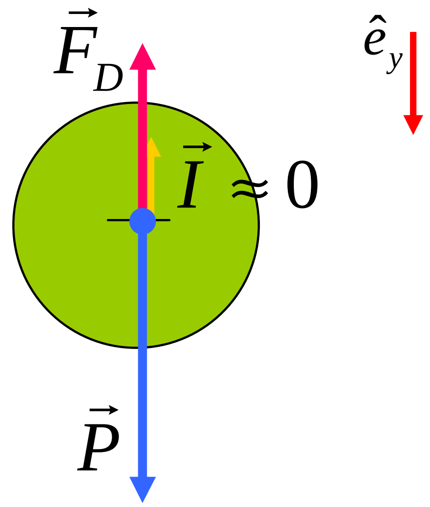
Velocidade terminal na queda livre dos graves

Um corpo que cai **no ar**, tem três forças aplicadas (ver figura):

1. Força da gravidade, **P**

2. Força de atrito do ar, $\mathbf{F}_D$

3. Força de impulsão hidrostática, **I** (vamos considerá-la desprezável)



Pela Segunda Lei de Newton,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{F}_D + \vec{I} = m\vec{a}$$

Considerando o eixo y da figura :

$$mg - \tfrac{1}{2} C_d \rho A v^2 = ma$$

$$a = g - \tfrac{1}{2} \frac{C_d \rho A v^2}{m}$$

Velocidade Terminal

A aceleração no inicio da queda é 9,8 m/s^2, e vai diminuindo á medida que aumenta a velocidade. A aceleração será nula quando,

$$v_{term} = \sqrt{\frac{2mg}{C_d \rho A}}$$

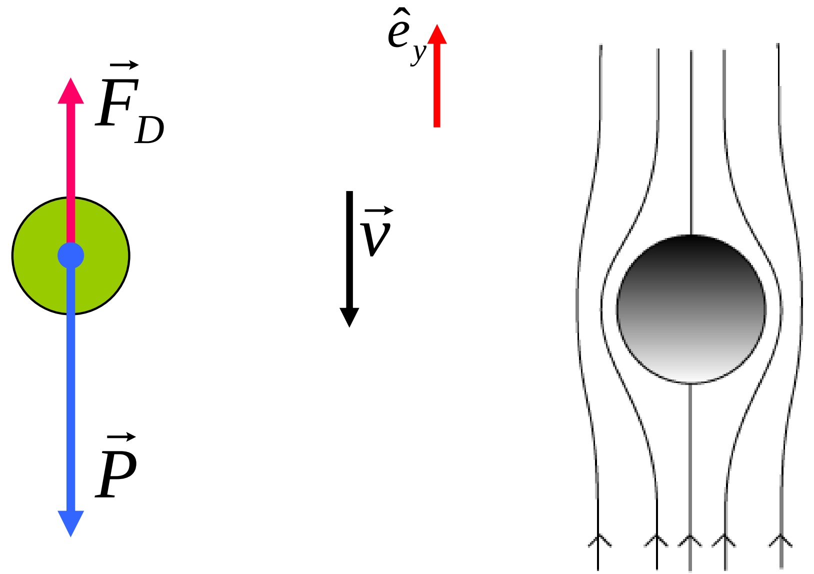
Velocidade terminal

Calcule a velocidade terminal de um pingo de chuva de raio 1,5 mm. Suponha que C_d=0.6 e que a massa específica do ar é 1,2 kg/m^3. (R: 7.5 m/s)

Coeficiente de arrasto e a Lei de Stokes.

Quando o tipo de escoamento do **liquido** em torno do **sólido** (esfera) não é turbulento mas **escoamento laminar** (i.e. sem remoinhos) existe uma **dependência linear da força de atrito com a velocidade do corpo**,

$$\vec{F}_D = -(6\pi R)\,\eta\, v\, \hat{e}_t$$



Sendo η a viscosidade do meio.

Qual a unidade da viscosidade?

A força de resistência do ar para o escoamento laminar é do tipo viscoso. Quando a velocidade aumenta acima de um certo limite (escoamento turbulento) a força de resistência é essencialmente aplicada na massa de ar para que este saia do caminho do sólido.

A viscosidade da glicerina depende da temperatura sendo 1.49 Pa·s a 20ºC, e 0.95 Pa·s a 25ºC.

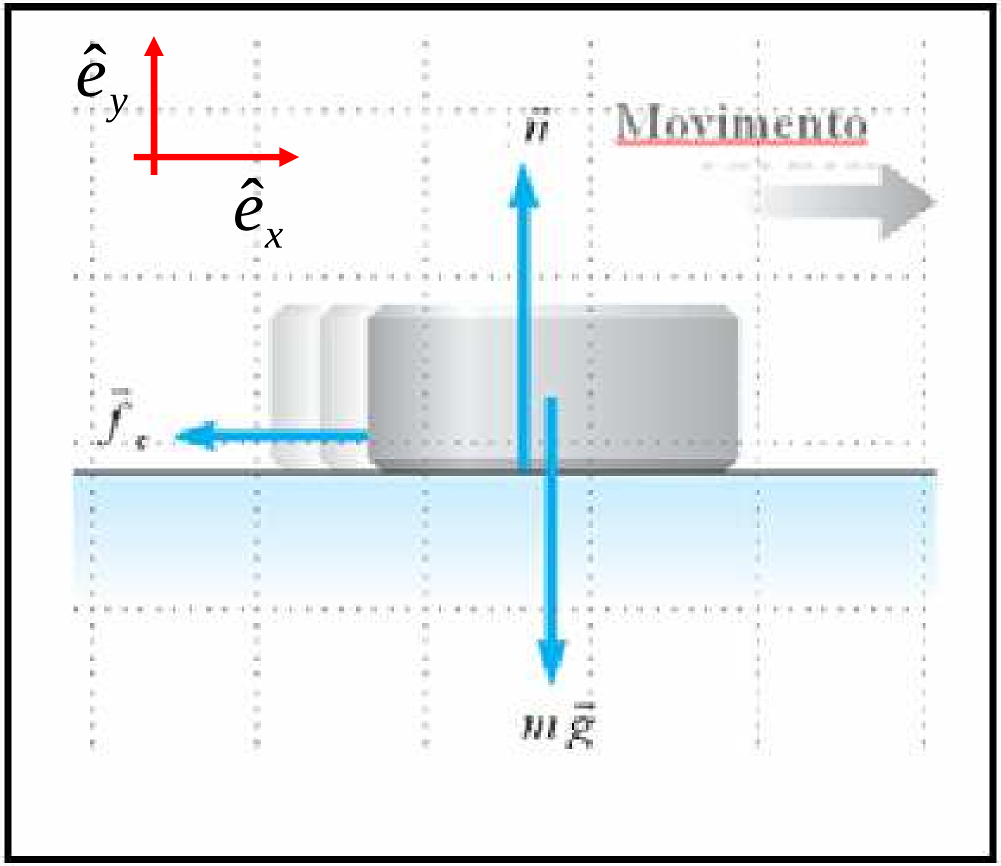
Exercício 1

Qual a aceleração do objecto na figura sabendo que tem uma velocidade inicial v?

Pela segunda lei de Newton,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \begin{cases} -f_{ac} = ma_x \\ n - mg = 0 \end{cases}$$



Pela expressão do atrito cinético:

$$f_{ac} = \mu_c n$$

Resolvendo, $$\begin{aligned} a_x &= -\mu_c g \\ a_y &= 0 \end{aligned}$$

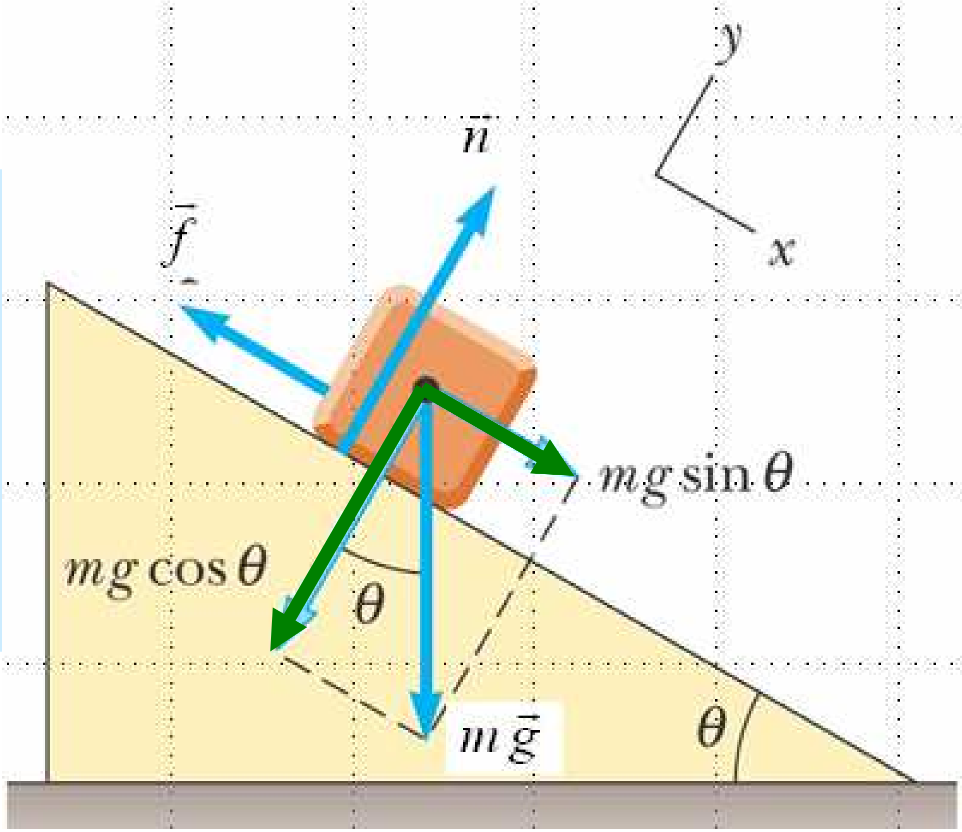
O corpo tem uma aceleração no sentido contrário do movimento.

Exercício

Obtenha a aceleração do corpo da figura na situação indicada?

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \begin{cases} mg\sin(\theta) - f_{ac} = ma_x \\ n - mg\cos(\theta) = 0 \end{cases}$$



Nota: As forças externas aplicadas estão a azul.

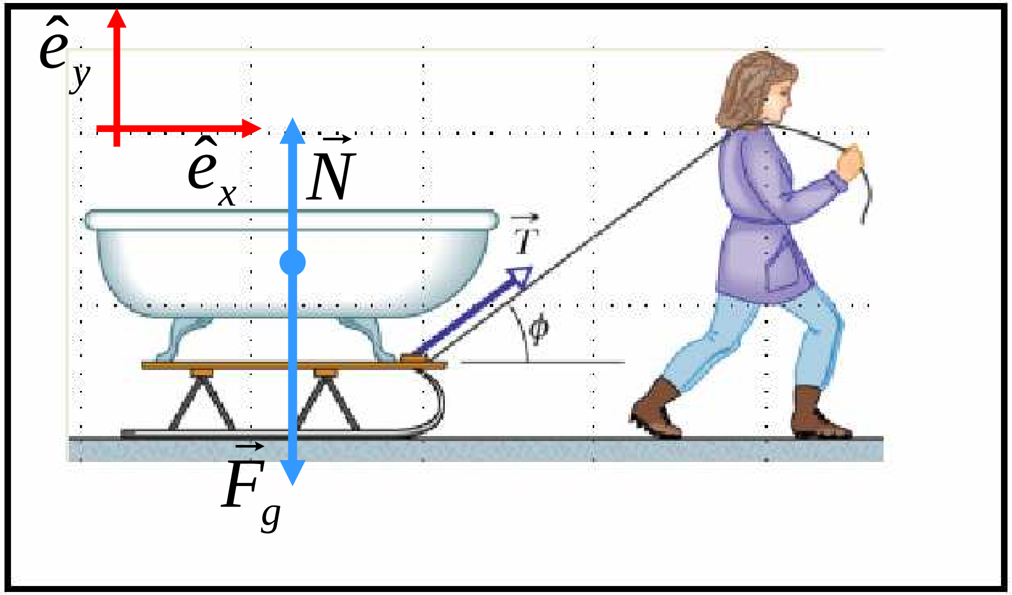
Pela expressão do atrito cinético: $f_{ac} = \mu_c n$

Resolvendo em ordem $a_x = g\left(\sin(\theta) - \mu_c \cos(\theta)\right)$

Comente a situação em que a aceleração poderá ser nula.

Exercício

Que força T faz o homem, sabendo que a velocidade do trenó é constante?



Se a velocidade é constante a aceleração é nula,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow$$

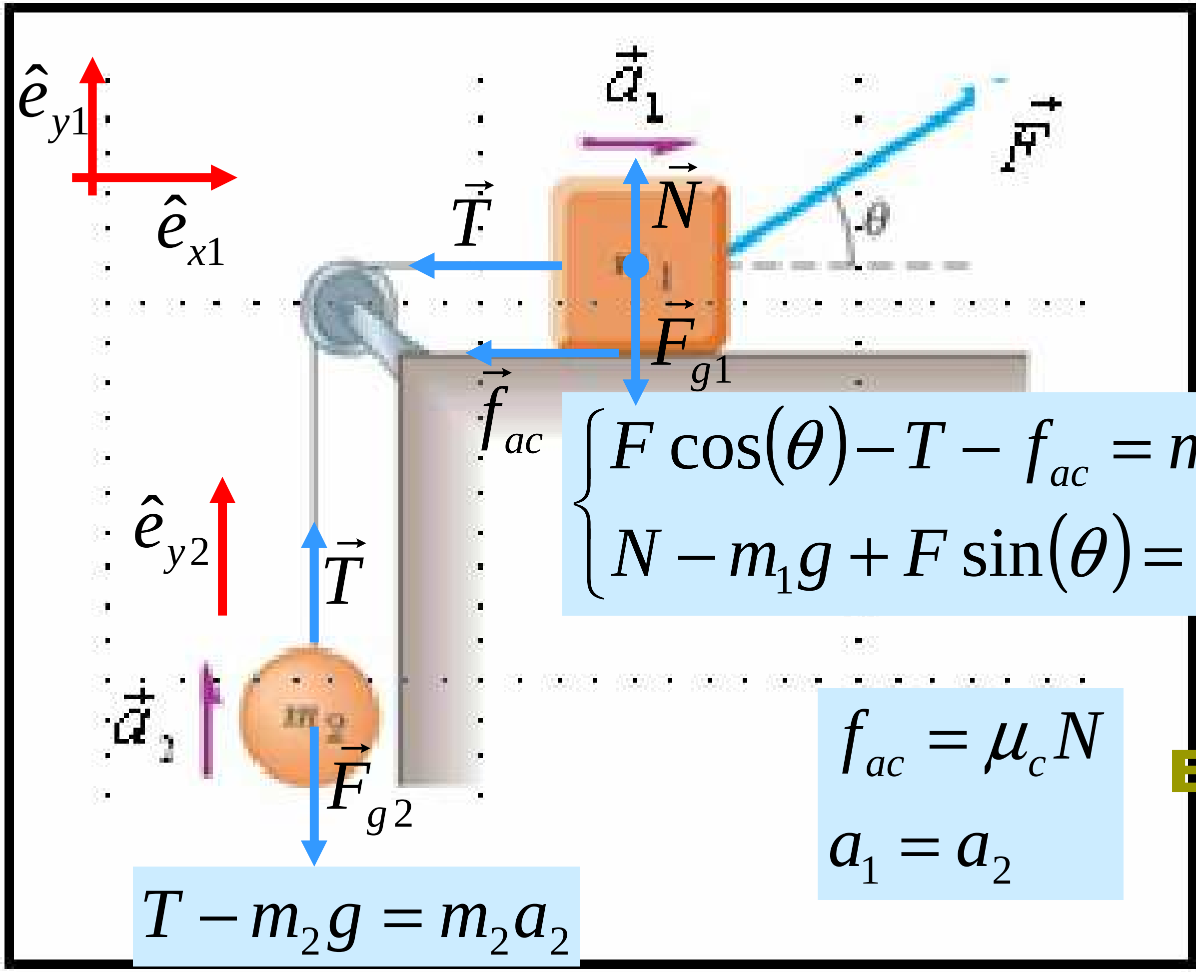
$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \begin{cases} T\cos(\phi) - f_{ac} = 0 \\ N - mg + T\sin(\phi) = 0 \end{cases}$$

Pela expressão do atrito cinético: $f_{ac} = \mu_c n$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \dfrac{\mu_c mg}{\cos(\phi) + \mu_c \sin(\phi)} \\ N = \dfrac{mg\cos(\phi)}{\cos(\phi) + \mu_c \sin(\phi)} \end{cases}$$

Exercício

Qual a aceleração do sistema <u>assumindo que o sistema se está a deslocar para a direita</u>?



$$\begin{cases} F\cos(\theta) - T - f_{ac} = m_1 a_1 \\ N - m_1 g + F\sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

2ª Lei de Newton para m_1

$$T - m_2 g = m_2 a_2$$

2ª Lei de Newton para m_2

$$f_{ac} = \mu_c N$$
$$a_1 = a_2$$

Eqs. de ligação e auxiliares.

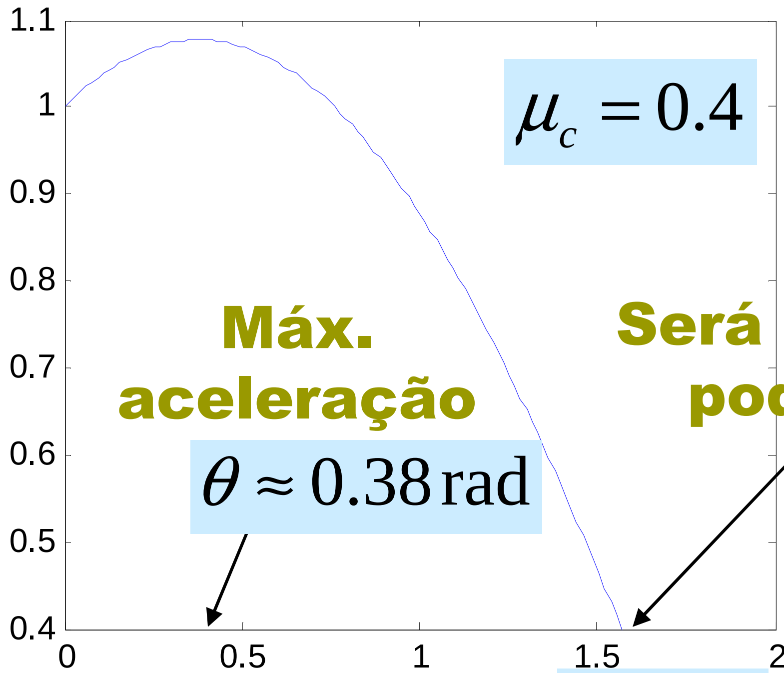
$$a = \frac{F\left(\cos\theta + \mu_c \sin(\theta)\right) - \left(\mu_c m_1 g + m_2 g\right)}{m_1 + m_2}$$

Problema (cont.)

$$a = \frac{F\left(\cos\theta + \mu_c \sin(\theta)\right) - \left(\mu_c m_1 g + m_2 g\right)}{m_1 + m_2}$$

Qual o ângulo que garante a maior aceleração possível?

$$y = \cos\theta + \mu_c \sin(\theta)$$



y

$\mu_c = 0.4$

$\theta(rad)$

Máx. aceleração

$\theta \approx 0.38\,\mathrm{rad}$

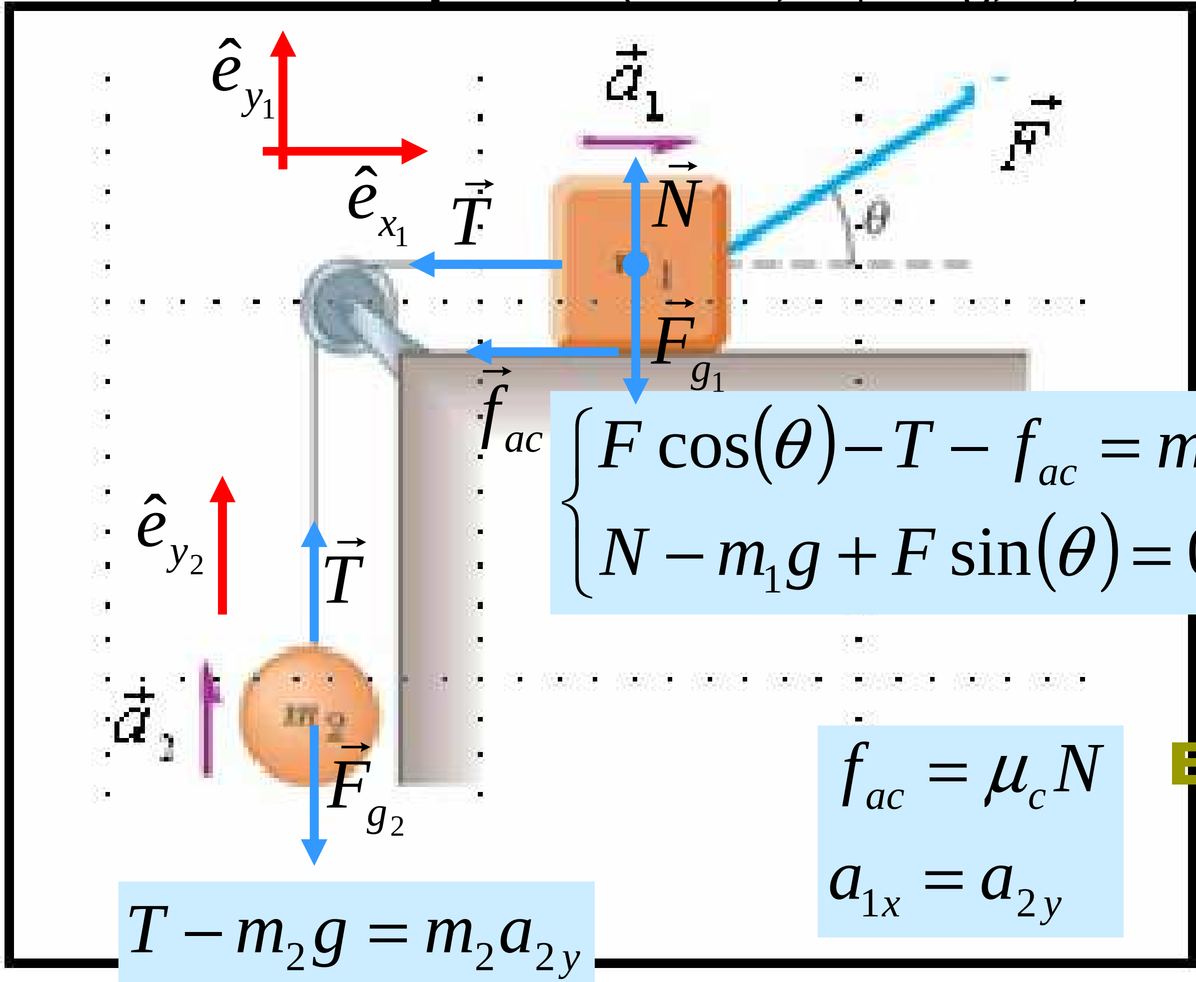
Será que o ângulo pode ser 90º?

Não. $\cos(\theta) > \dfrac{m_2 g}{F}$

Porquê?

Exercício

O sistema está inicialmente em repouso quando é aplicada uma força F. Determine para que valores da força F o sistema se desloca para a **direita**? E se desloca para a **esquerda**? E está em **repouso**? (θ=30º; m_1=3kg; m_2=2.5kg; μ_c=0.4)



$$\begin{cases} F\cos(\theta) - T - f_{ac} = m_1 a_{1x} \\ N - m_1 g + F\sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

2ª Lei de Newton para m_1

$$f_{ac} = \mu_c N$$
$$a_{1x} = a_{2y}$$

Eqs. de ligação e auxiliares.

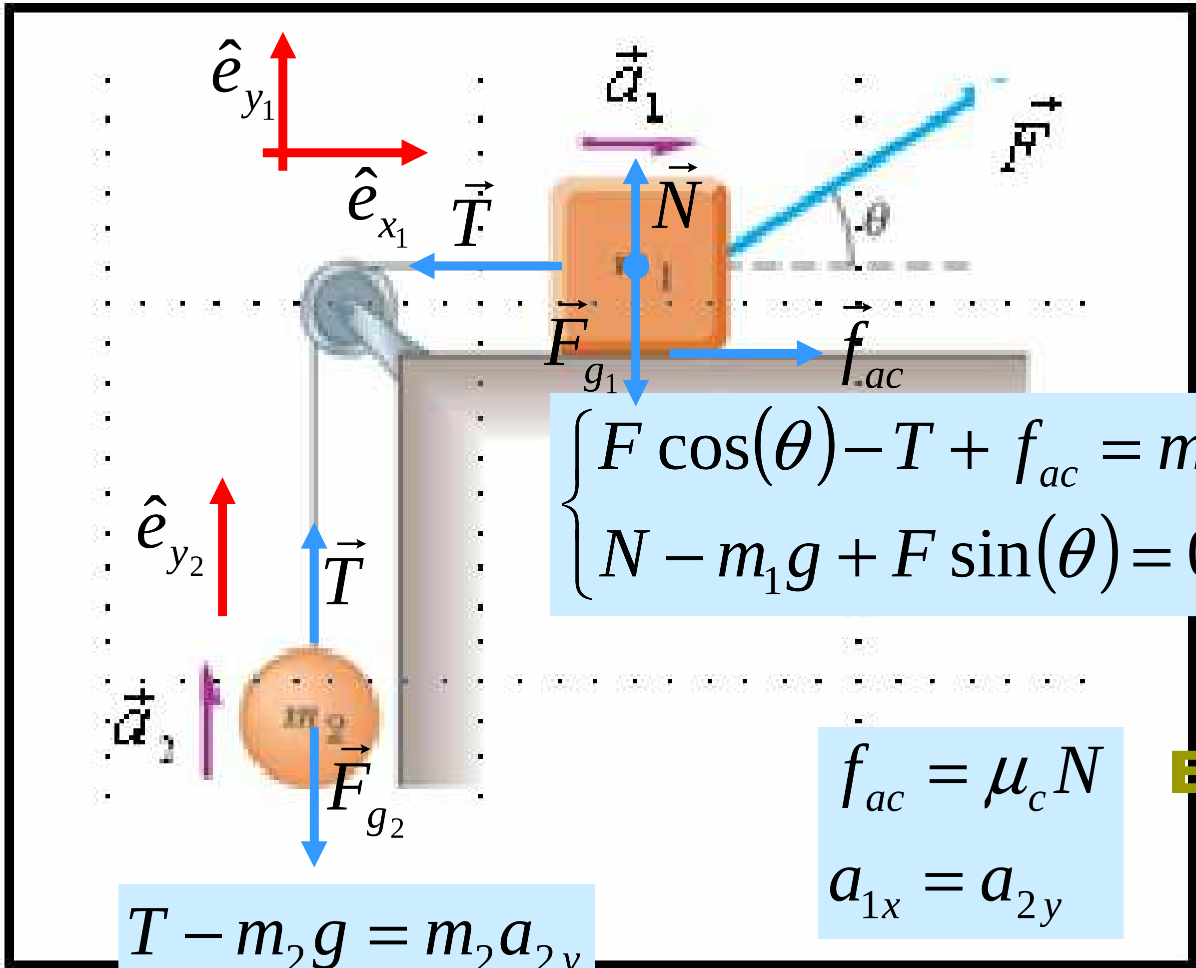
$$T - m_2 g = m_2 a_{2y}$$

2ª Lei de Newton para m_2

$$a = \frac{F(\cos\theta + \mu_c \sin(\theta)) - (\mu_c m_1 g + m_2 g)}{m_1 + m_2} > 0$$

Exercício

Determine para que valores da força F o sistema desloca para a **esquerda**?
(θ=30º; m_1=3kg; m_2=2.5kg; μ_c=0.4)



$$\begin{cases} F\cos(\theta) - T + f_{ac} = m_1 a_{1x} \\ N - m_1 g + F\sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

2ª Lei de Newton para m_1

$$T - m_2 g = m_2 a_{2y}$$

2ª Lei de Newton para m_2

$$f_{ac} = \mu_c N$$

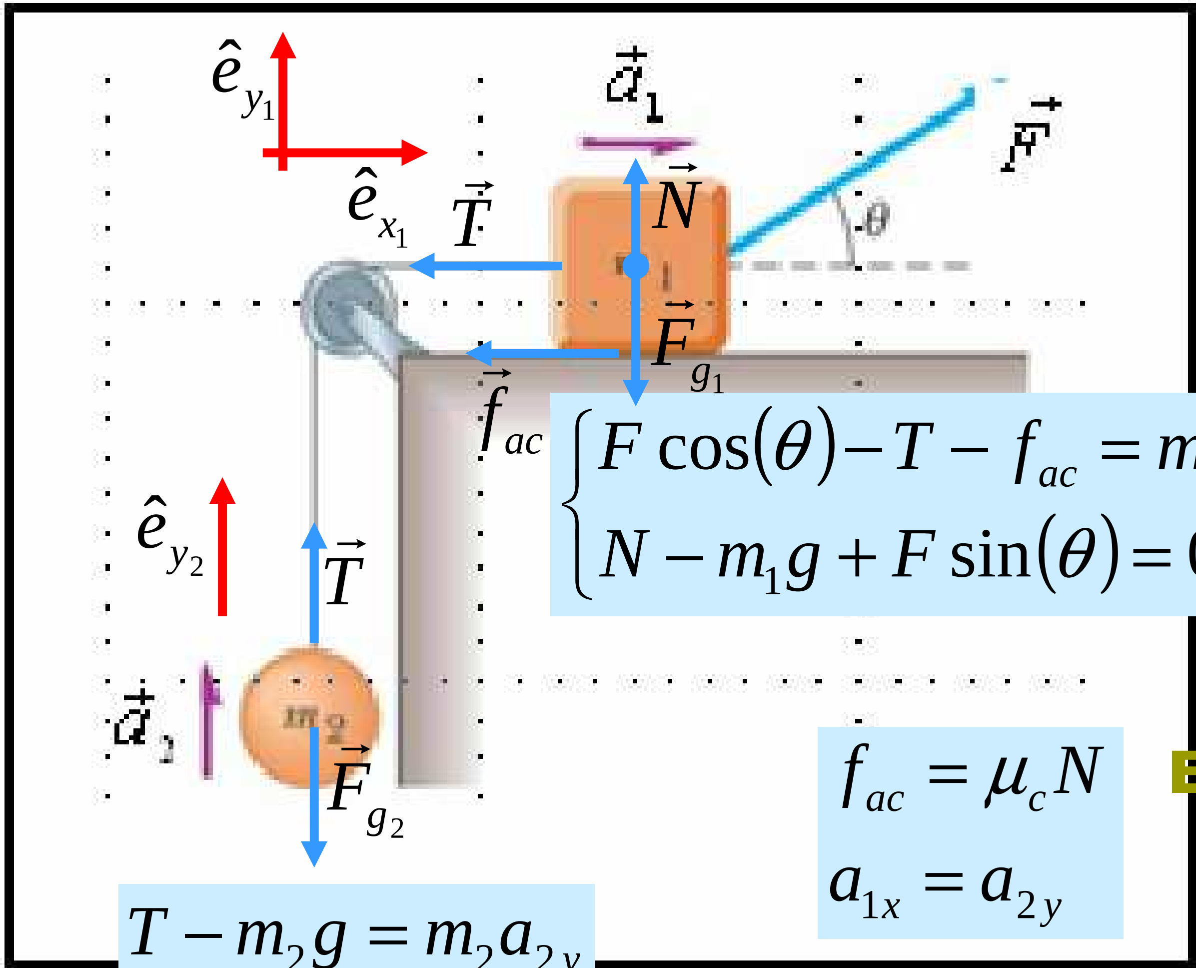
$$a_{1x} = a_{2y}$$

Eqs. de ligação e auxiliares.

$$a = \frac{F(\cos\theta + \mu_c \sin(\theta)) - (\mu_c m_1 g + m_2 g)}{m_1 + m_2} < 0$$

Exercício

Determine para que valores da força F o sistema está em **repouso**? E para que valor de F é que a força de atrito é nula. (θ=30º; m_1=3kg; m_2=2.5kg; μ_c=0.4)



$$\begin{cases} F\cos(\theta) - T - f_{ac} = m_1 a_{1x} \\ N - m_1 g + F\sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

2ª Lei de Newton para m_1

$$f_{ac} = \mu_c N$$
$$a_{1x} = a_{2y}$$

Eqs. de ligação e auxiliares.

$$T - m_2 g = m_2 a_{2y}$$

2ª Lei de Newton para m_2

$$a = \frac{F(\cos\theta + \mu_c \sin(\theta)) - (\mu_c m_1 g + m_2 g)}{m_1 + m_2} > 0$$

Aula 8 – Movimento Circular. Movimento Relativo.

1. Movimento Circular

2. Movimento Relativo

3. Efeitos da Rotação da Terra

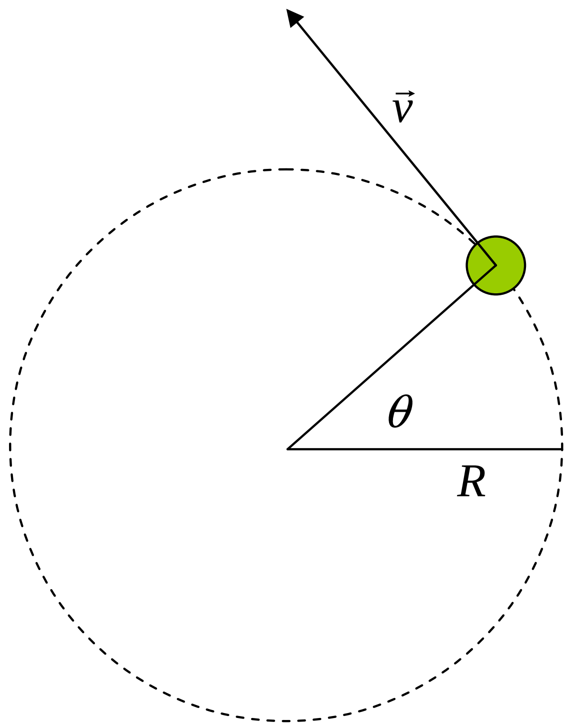
Movimento Circular e Uniforme

O corpo descrevendo uma trajectória circular.

R – **raio** [m] do circulo descrito pelo corpo.

T – **período** [s]. Tempo necessário para completar um ciclo

No movimento circular **uniforme**, o corpo necessita sempre **o mesmo tempo T,** para completar uma volta ou ciclo.



f **- frequência** [Hz]. É o número de ciclos descritos por unidade de tempo

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

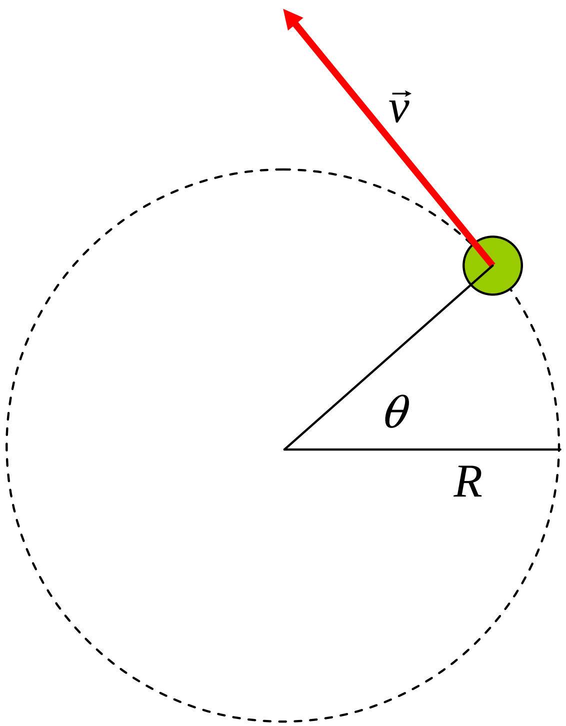
Velocidade angular

A **velocidade angular instantânea** ω [rad/s] é o ângulo descrito por unidade de tempo.

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

Sendo a velocidade angular **constante no tempo** obtemos para a **posição angular**, depois de integrar,

$$\int_{\theta_o}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt$$
$$\theta - \theta_o = \omega(t - t_0)$$
$$\theta = \theta_o + \omega(t - t_0)$$



Relação entre a velocidade angular e a frequência angular.

Para um ciclo temos,

$$\boxed{\omega = \frac{\theta - \theta_o}{t - t_0} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

Aceleração angular

Se a velocidade angular ω variar linearmente no tempo então existe aceleração angular α [rad/s²].

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}}$$

Se a **aceleração angular** for **constante** obtemos depois de integrar,

$$\int_{\omega_o}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha dt$$

$$\omega = \omega_o + \alpha t$$

$$\theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Nota: Nestas equações o instante inicial é t_o=0

Eqs. do movimento uniform. acelerado

$$v = v_o + at$$

$$x = x_o + v_o t + \frac{at^2}{2}$$

Repare na correspondência com as expressões para o movimento uniformemente acelerado 1D. Quais as grandezas equivalentes ou análogas?

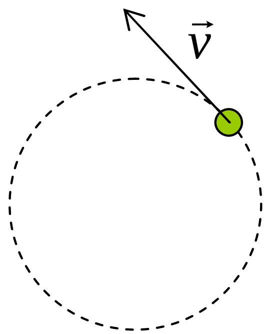
α	é análogo a	a
ω	é análogo a	v
θ	é análogo a	x

O Módulo da Velocidade no Movimento Circular

O **módulo** da velocidade ao longo do circulo, v (m/s), algumas vezes impropriamente chamada velocidade linear, está relacionada com a velocidade angular e com o raio do circulo.

Para um ciclo temos,

$$\boxed{v = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} = \omega R}$$



O **vector** velocidade no movimento circular uniforme é:

1. Constante em módulo
2. Tangente á trajectória (como sempre) e por isso **varia continuamente** de direcção

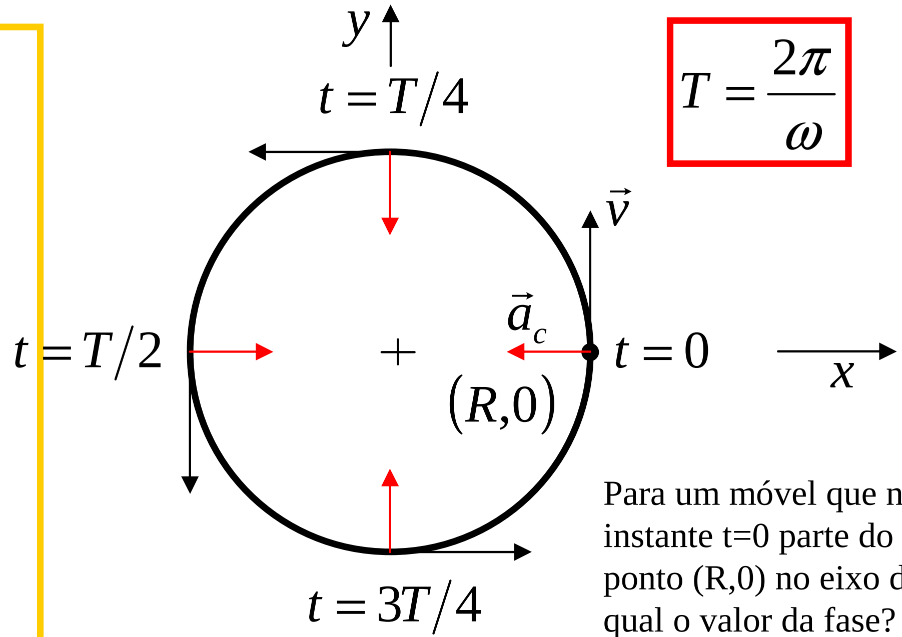
Movimento circular uniforme em coordenadas cartesianas

POSIÇÃO

$$\vec{r} = \begin{cases} x = R\cos(\omega t + \phi) \\ y = R\sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

Esta é a equação de um móvel rodando em torno de um eixo centrado na origem, cuja posição inicial é:

$$\vec{r}_o = \begin{cases} x_o = R\cos(\phi) \\ y_o = R\sin(\phi) \end{cases}$$



$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Para um móvel que no instante t=0 parte do ponto (R,0) no eixo do x qual o valor da fase?

$$\phi = ?$$

VELOCIDADE

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = -\omega R\sin(\omega t + \phi) \\ v_y = \omega R\cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

Qual o módulo da velocidade?

ACELERAÇÃO

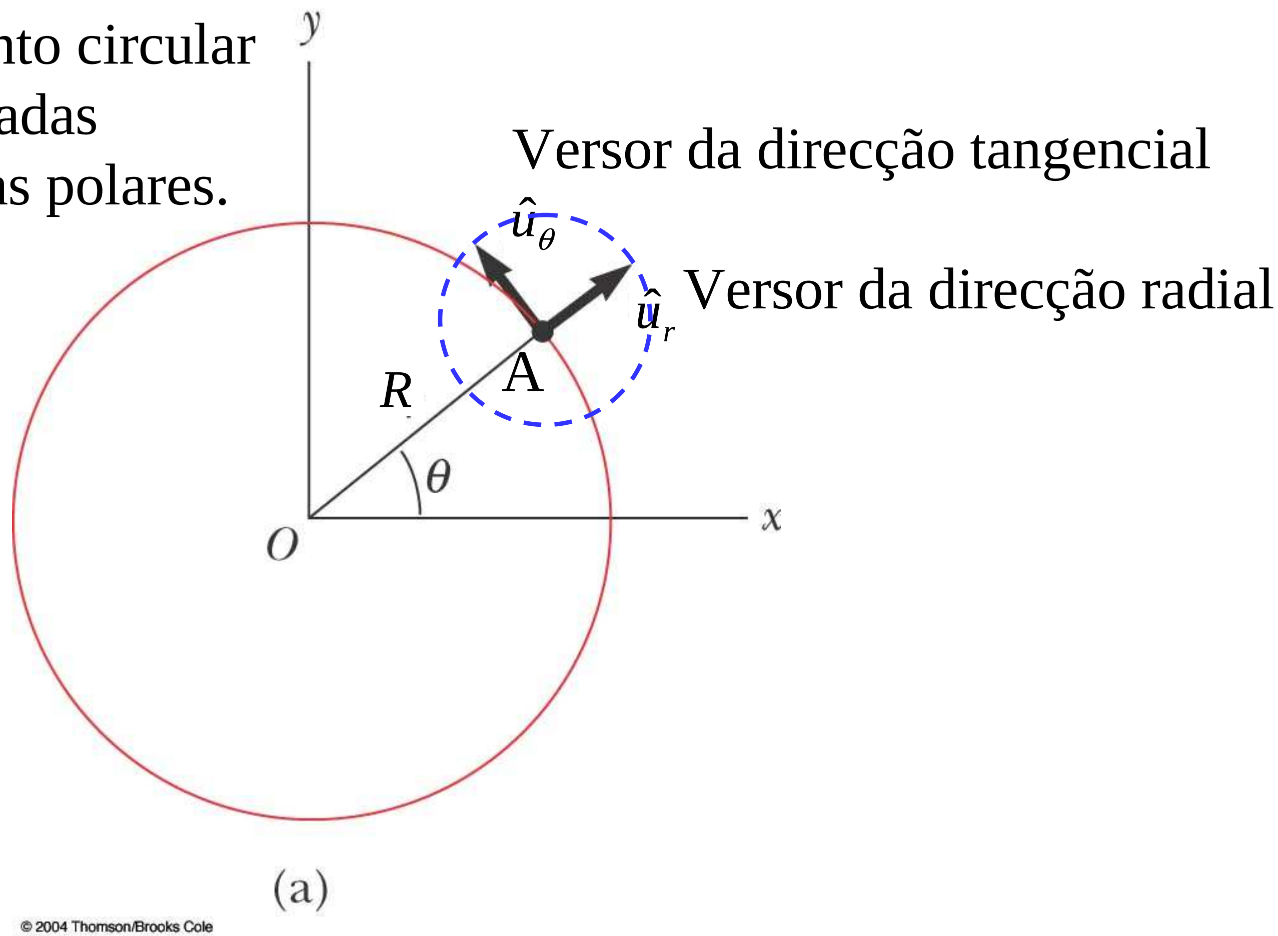
$$\vec{a}_c = \begin{cases} a_{cx} = -\omega^2 R\cos(\omega t + \phi) \\ a_{cy} = -\omega^2 R\sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

Qual o módulo da aceleração?

Calcule $\vec{v} \cdot \vec{a}_c$. Justifique?

Versores das coordenadas polares

Para descrever o movimento circular podemos usar ou coordenadas cartesianas ou coordenadas polares.



No movimento circular:

O vector posição tem módulo constante

$$\vec{r} = R\hat{u}_r$$

ATENÇÃO: **Os versores radial e o tangencial variam no tempo** (i.e. rodam com velocidade angular ω).

A Derivada do versor Radial

Os versores radial e tangencial, de comprimentos unitários, rodam com velocidade ω. descrevendo um circulo de raio unitário.

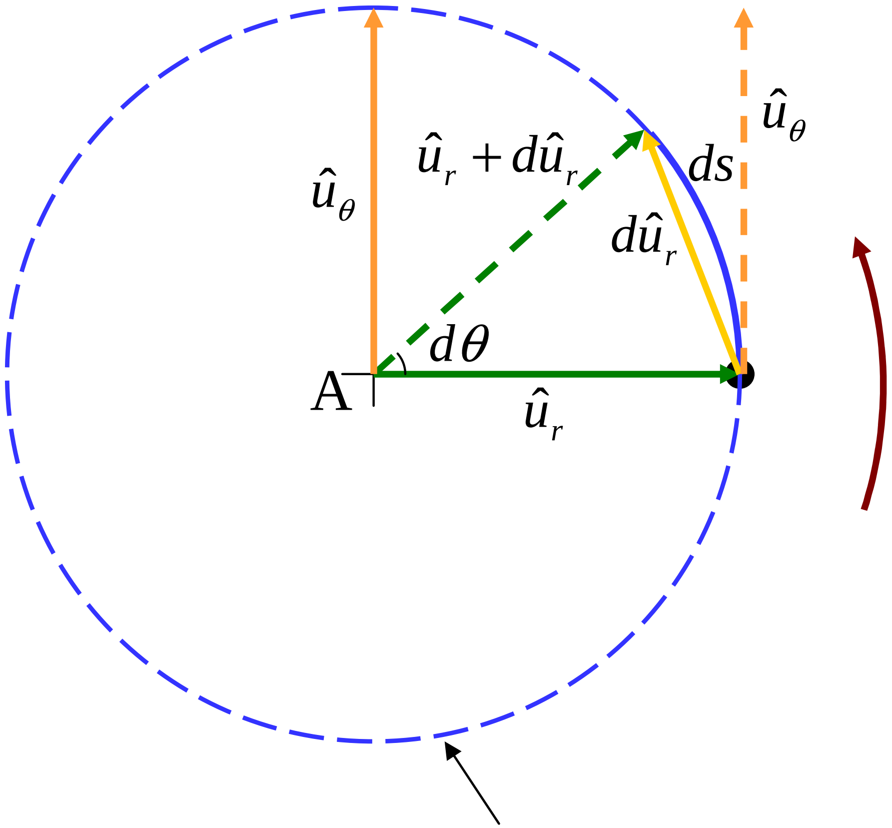
$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{d\hat{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \left[\frac{|d\hat{u}_r|}{d\theta}\hat{u}_\theta\right]\omega$$

$$\cong \left[\frac{ds}{d\theta}\hat{u}_\theta\right]\omega$$

$$= \left[1\frac{d\theta}{d\theta}\cdot\hat{u}_\theta\right]\omega$$

$$\boxed{\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \omega\,\hat{u}_\theta}$$



Circulo unitário descrito pelos versores radial e tangencial

$$|\hat{u}_r| = |\hat{u}_r + d\hat{u}_r| = 1$$

A Derivada do versor Tangencial

Os versores radial e tangencial, de comprimentos unitários, rodam com velocidade ω.

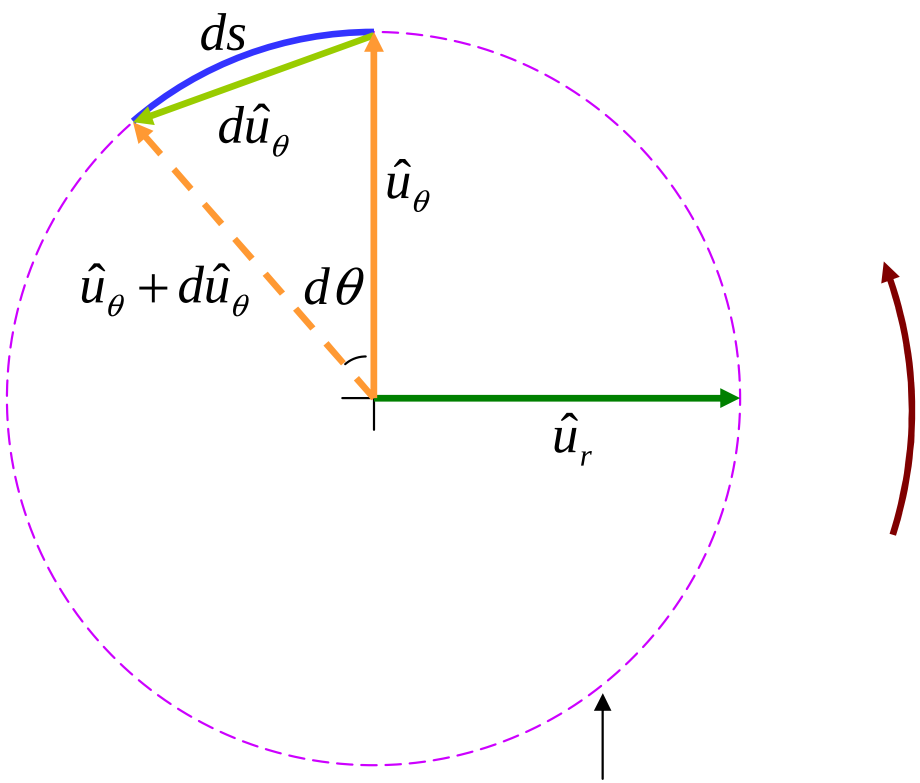
$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = \frac{d\hat{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \left[\frac{|d\hat{u}_\theta|}{d\theta}(-\hat{u}_r)\right]\omega$$

$$\cong \left[\frac{ds}{d\theta}(-\hat{u}_r)\right]\omega$$

$$= -[1\cdot\hat{u}_r]\omega$$

$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\omega\hat{u}_r$$



Circulo unitário descrito pelos versores radial e tangencial

$$|\hat{u}_\theta| = |\hat{u}_\theta + d\hat{u}_\theta| = 1$$

A Velocidade em coordenadas polares.

A velocidade é a derivada do vector posição, i.e.,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\hat{u}_r\right)$$

$$= R\frac{d\hat{u}_r}{dt} + \frac{dR}{dt}\hat{u}_r$$

$$= R\frac{d\hat{u}_r}{dt} + 0$$

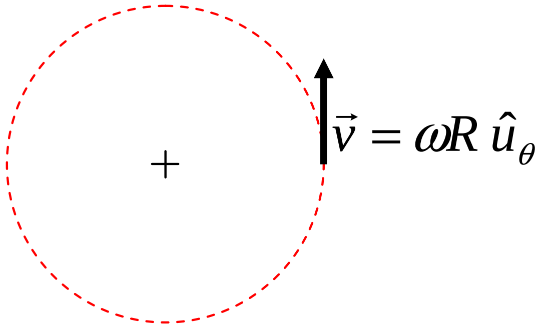
$$\boxed{\vec{v} = \omega R\,\hat{u}_\theta}$$

Porque o mov. é circular

Derivadas dos versores

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \omega\hat{u}_\theta$$

$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\omega\hat{u}_r$$



A Aceleração em coordenadas polares.

A aceleração é a derivada do vector velocidade, i.e.,

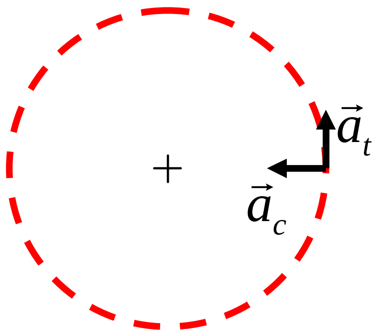
$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\omega R\hat{u}_\theta\right)\\
&= \omega R\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} + \frac{d\left(\omega R\right)}{dt}\hat{u}_\theta\\
&= \omega R\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} + \frac{d\left(|v|\right)}{dt}\hat{u}_\theta\\
&= \omega R\left(-\omega\hat{u}_r\right) + \frac{d\left(|v|\right)}{dt}\hat{u}_\theta\\
&= \underbrace{-\frac{|v|^2}{R}\hat{u}_r}_{\vec{a}_c} + \underbrace{\frac{d\left(|v|\right)}{dt}\hat{u}_\theta}_{\vec{a}_t}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{a_c = \frac{|v|^2}{R}} \qquad \boxed{a_t = \frac{d|v|}{dt}}$$

Derivadas dos versores

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \omega\hat{u}_\theta$$

$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\omega\hat{u}_r$$



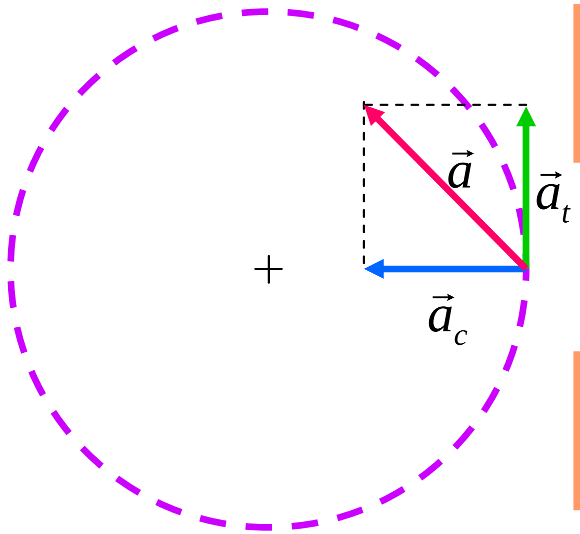
A aceleração tangencial é colinear com a velocidade e portanto tangente à trajectória.

A aceleração normal ou centrípeta é normal á velocidade e aponta para dentro do circulo

Movimento CIRCULAR. Caso Geral (não-uniforme).

O vector **aceleração total** é a soma vectorial das acelerações centrípeta e tangencial.

O seu **módulo** é dado por, $\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}}$



$$a_t = \frac{d|v|}{dt}$$

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

1. **A aceleração normal ou centrípeta é normal á velocidade e aponta para dentro do circulo**
2. **A aceleração tangencial é colinear com a velocidade e portanto tangente à trajectória.**

Força Centrípeta

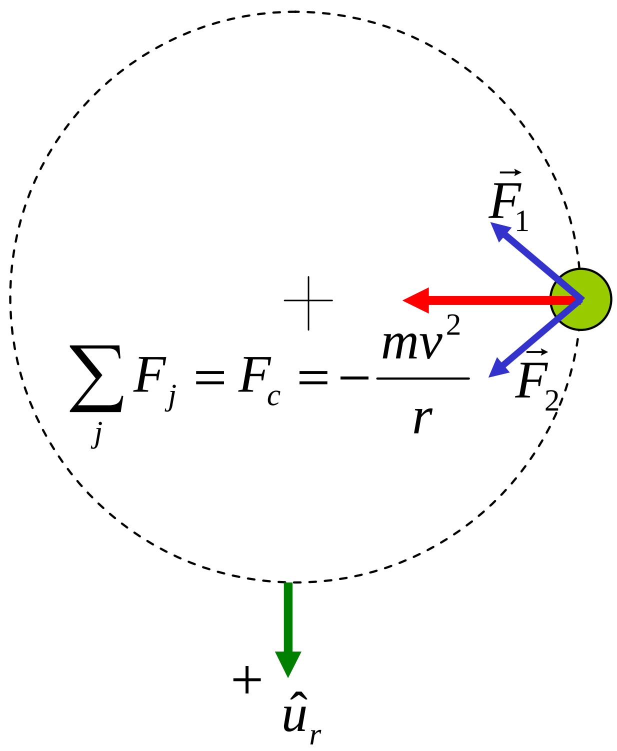
Um corpo em movimento circular tem uma aceleração centrípeta:

$$\vec{a}_c = -\frac{v^2}{r}\hat{u}_r$$

Mas pela Segunda Lei de Newton, a **Resultante das Forças aplicadas, na <u>direcção radial</u>** está relacionada com a aceleração na mesma direcção.

Assim na **<u>direcção radial</u>** (a eq. é escalar!)

$$\sum_j F_j = ma_c$$



$$\sum_j F_j = F_c = -\frac{mv^2}{r}$$

Substituindo, $$F_c = -m\frac{v^2}{r}$$

Chama-se Força Centrípeta á <u>RESULTANTE das forças</u> <u>actuando no sentido radial</u> do movimento circular.

Movimento Circular

Um satélite terrestre move-se numa órbita circular a 640 km acima da superfície da Terra com um período de 98,0 min. Quais são os módulos
(a) da velocidade
(b) e da aceleração centrípeta do satélite
(R_T= 6370 km? (7.49x10^3 m/s; 8,00 m/s^2)

$$R = 6.37\times10^6 + 0.64\times10^6 = 7.01\times10^6\,m$$

$$\begin{aligned} v &= \omega R \\ &= \frac{2\pi}{T}R \\ &= \frac{2\pi}{98\cdot 60}7.01\times10^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{4\pi^2}{T^2}R \\ &= \frac{4\pi^2}{(98\cdot 60)^2}7.01\times10^6 \\ &= \end{aligned}$$

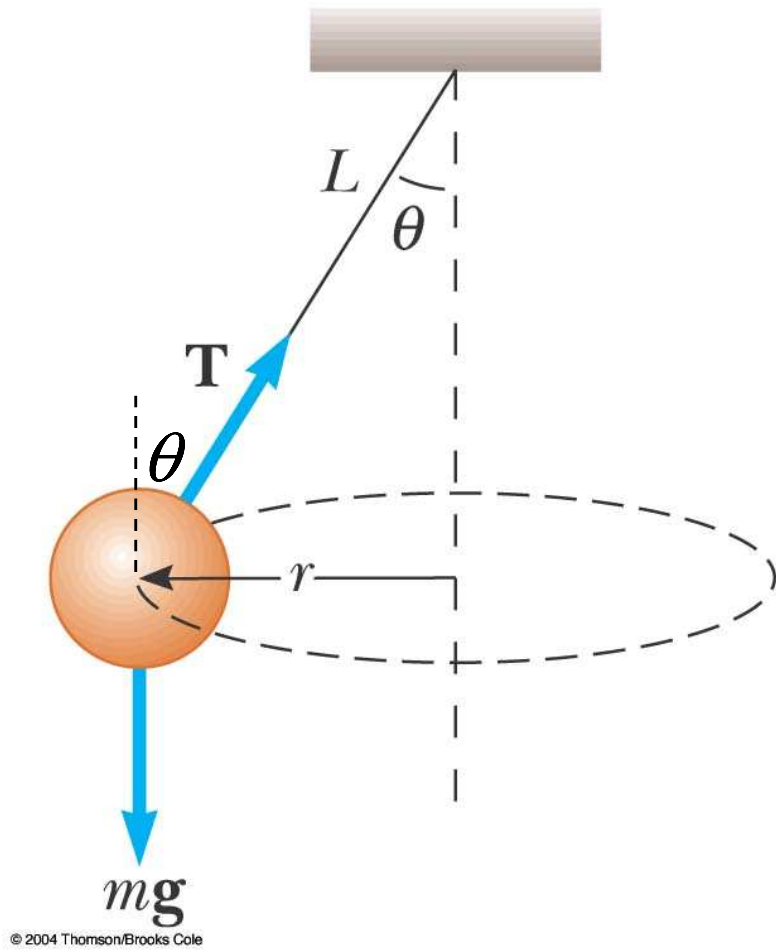
Pêndulo Cónico

Qual a velocidade que faz com que o objecto esteja em equilíbrio dinâmico?

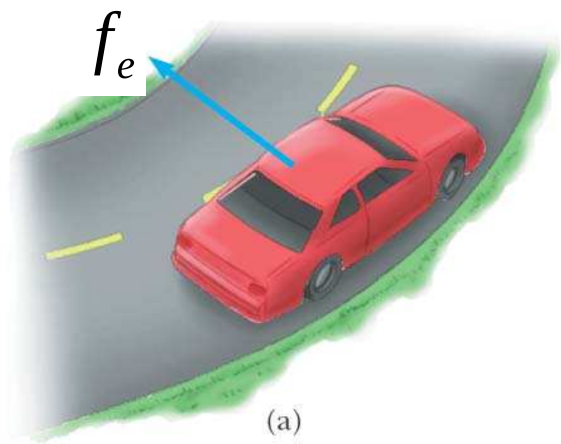
Aplicando a 2ª Lei de Newton na direcção vertical e na direcção radial,

$$\begin{cases} T\cos(\theta) - mg = 0 & \text{dir. vertical} \\ T\sin(\theta) = ma_c & \text{dir. radial} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = gr\tan(\theta)$$

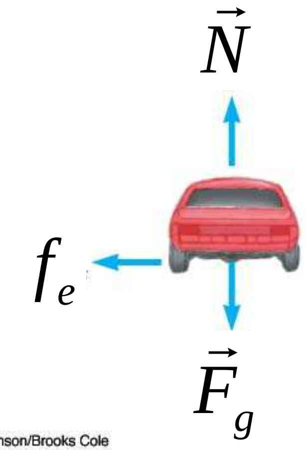


Qual a velocidade <u>máxima</u> a que o carro pode descrever a curva?



$$\begin{cases} N - F_g = 0 & \text{dir. vertical} \\ f_e = ma_c & \text{dir. radial} \end{cases}$$

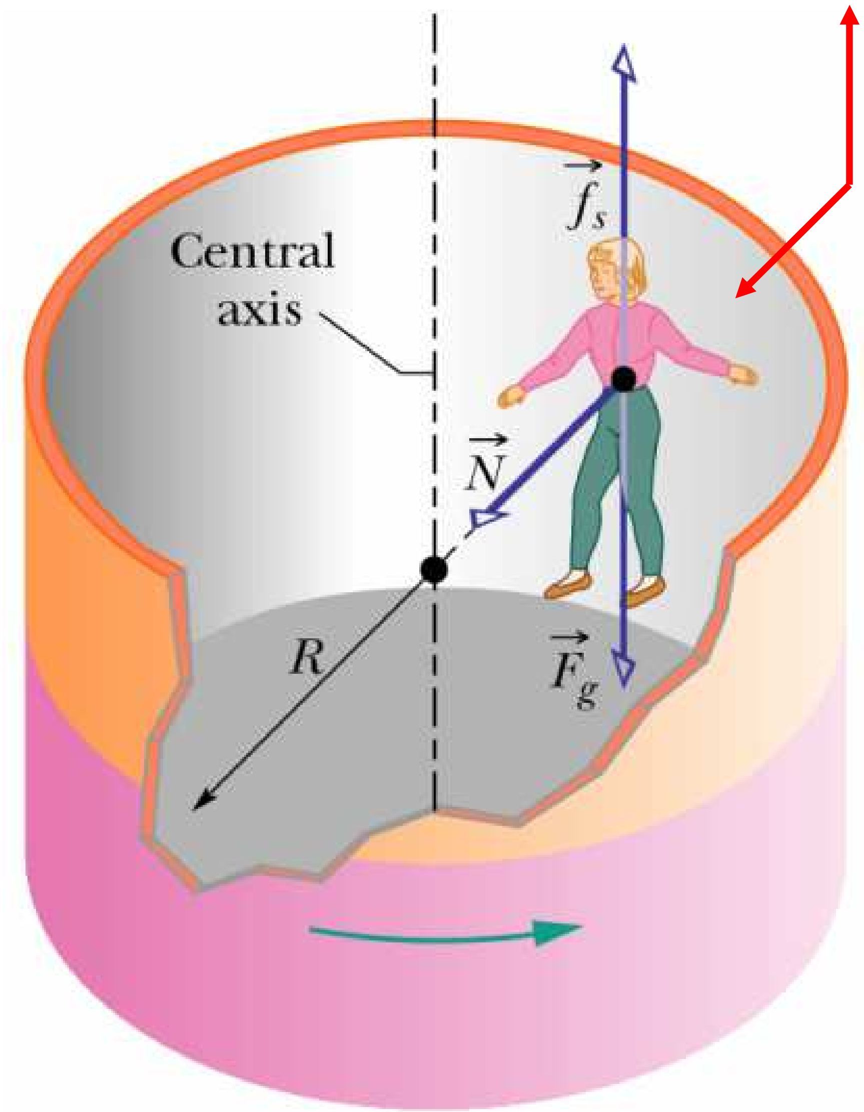
$$f_{e,\max} = \mu_e N$$



$$v_{\max} = \sqrt{\mu_e g r}$$

Poço da morte

Qual a velocidade mínima para que a menina não escorregue pelo poço?



$$\begin{cases} N = ma_c & \text{dir. radial} \\ f_e - F_g = 0 & \text{dir. vertical} \end{cases}$$

$$f_{e,\max} = \mu_e N$$

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{gr}{\mu_e}}$$

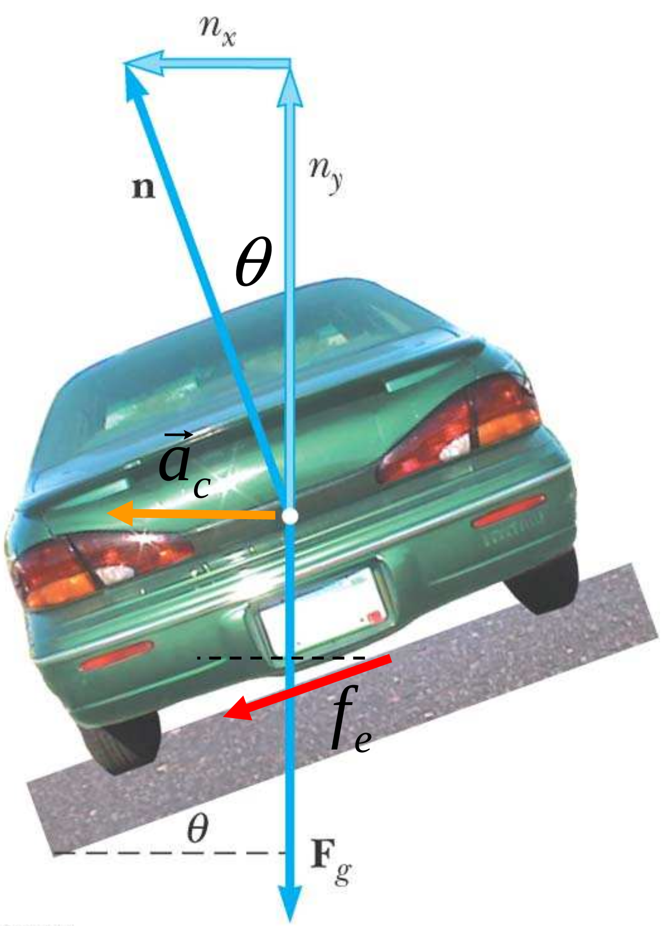
Curva com inclinação

Qual a velocidade para a qual a força de atrito perpendicular ao movimento, é nula?

$$\begin{cases} N\cos(\theta) - F_g = 0 & \text{dir. vertical} \\ N\sin(\theta) = ma_c & \text{dir. radial} \end{cases}$$

$$f_e = 0$$

$$\boxed{v^2 = gr\tan(\theta)}$$



E qual a velocidade máxima para que não derrape na curva?

$$\begin{cases} N\cos(\theta) - f_e\sin(\theta) - F_g = 0 & \text{dir. vertical} \\ N\sin(\theta) + f_e\cos(\theta) = ma_c & \text{dir. radial} \end{cases}$$

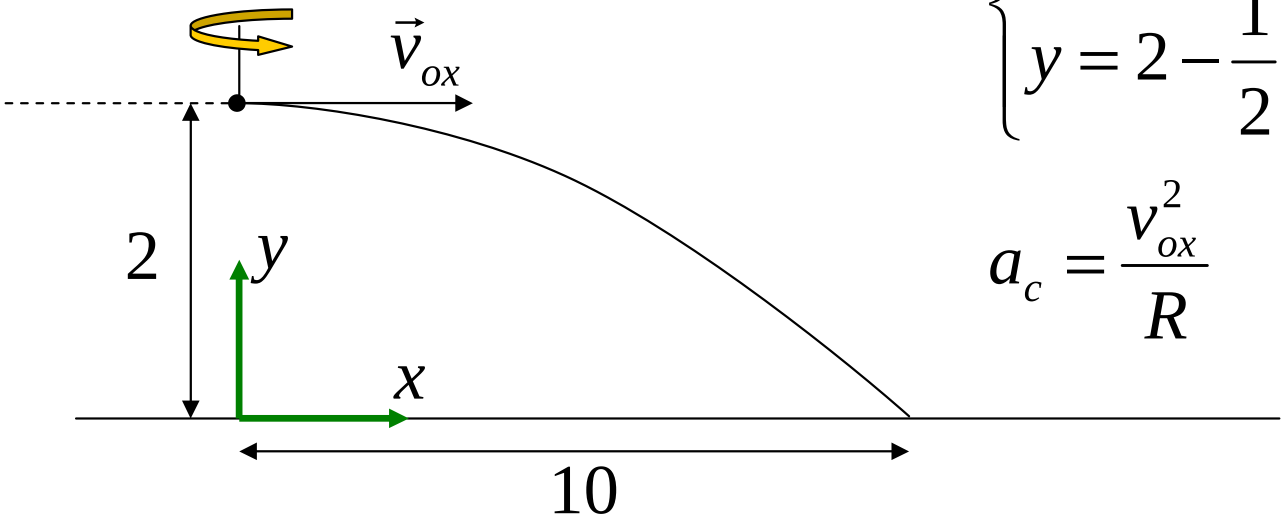
$$f_{e,\max} = \mu_e N$$

$$\boxed{v^2 = gr\frac{\sin(\theta) + \mu_e\cos(\theta)}{\cos(\theta) - \mu_e\sin(\theta)}}$$

Movimento Circular

Um garoto rodopia uma pedra num circulo horizontal com um raio de 1,5 m e a uma altura de 2,0 m acima do nível do chão. O fio parte-se e a pedra desprende-se e bate no chão após percorrer uma distância horizontal de 10 m. Qual o módulo da aceleração centrípeta da pedra enquanto estava em movimento circular? (163 m/s^2)

$$\begin{cases} x = v_{ox} t \\ y = 2 - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$



$$a_c = \frac{v_{ox}^2}{R}$$

No instante em que toca no chão x=10 e y=0. Então, $a_c =$

Exercício 2

A circunferência abaixo reproduz a trajectória circular de um corpo pontual que se desloca no sentido directo, com velocidade cujo módulo *decresce* de forma regular (i.e. a_t=cte). Supondo que o corpo, ao passar no ponto P, possui a velocidade   indicada na figura, desenhe os vectores velocidade e aceleração do corpo quando passar nos pontos Q, R e S.

i. O módulo da aceleração tangencial é constante no tempo

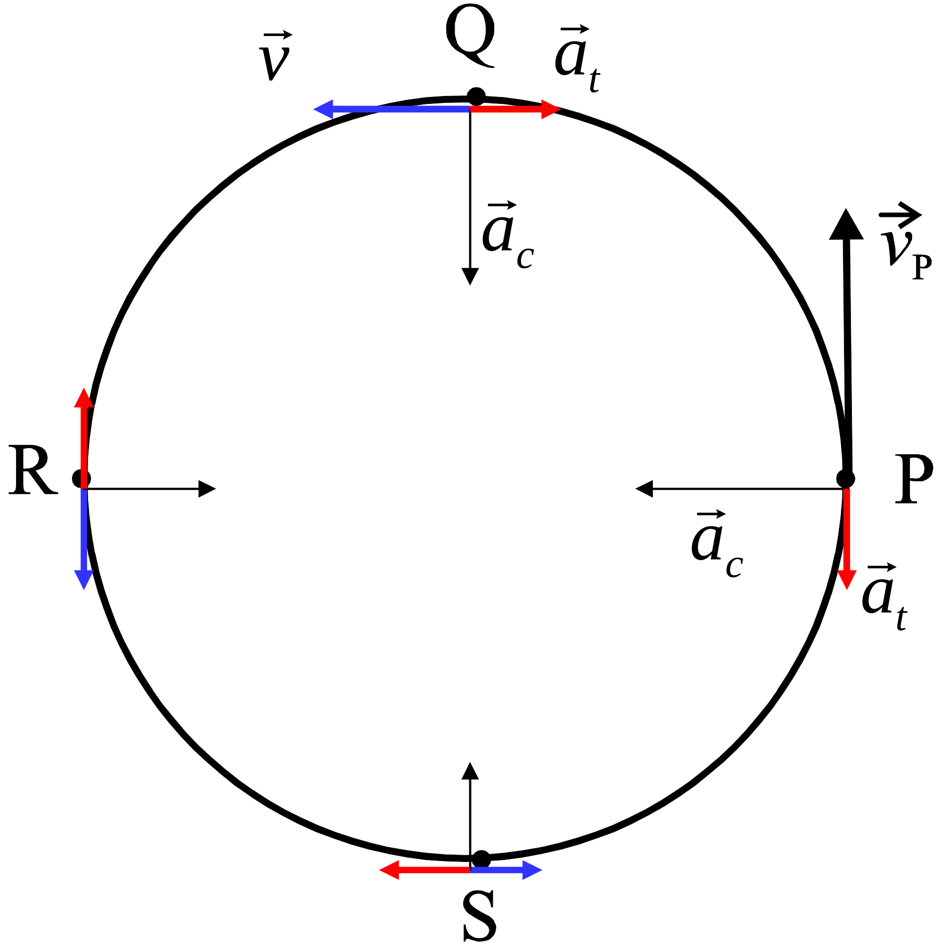
$$a_t = cte.$$

ii. O módulo da velocidade decresce linearmente no tempo

$$v = v_p - a_t t$$

iii. O módulo da aceleração centrípeta vai diminuir quadraticamente no tempo

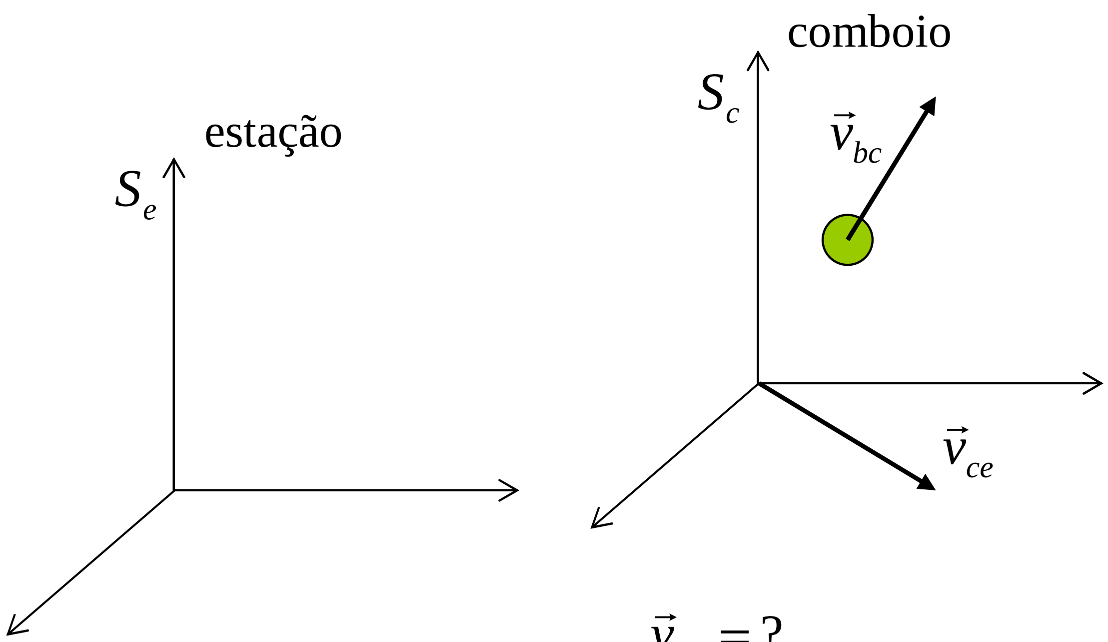
$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(v_p - a_t t\right)^2}{R}$$



Movimento Relativo

Um passageiro (S_c), viajando de comboio, lança uma bola para outro passageiro com velocidade $\boldsymbol{v}_{bc}$.

Qual a velocidade $\boldsymbol{v}_{be}$ da bola, relativa a um observador S_e que esteja parado na estação, sabendo que o comboio tem uma velocidade $\boldsymbol{v}_{ce}$ relativamente á estação?



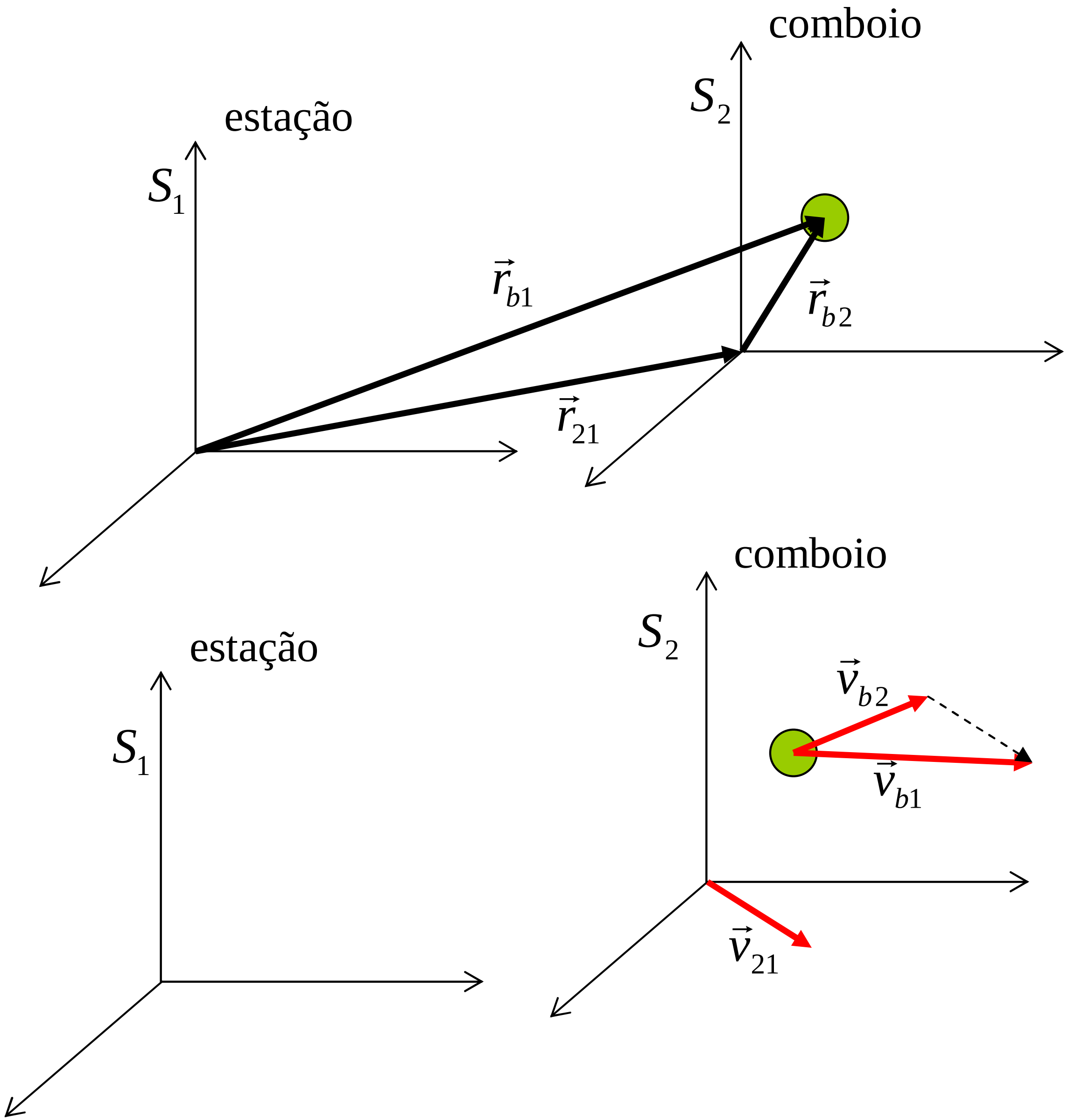
$$\vec{v}_{be} = ?$$

Composição de Velocidades. Transformação de Galileu.

Temos para os vectores posição,

$$\vec{r}_{b1} = \vec{r}_{b2} + \vec{r}_{21}$$

Onde $\mathbf{r}_{21}$ é a posição do comboio relativamente á estação.



Derivando em ordem ao tempo,

$$\frac{d\vec{r}_{b1}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{b2}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{21}}{dt}$$

Simplificando,

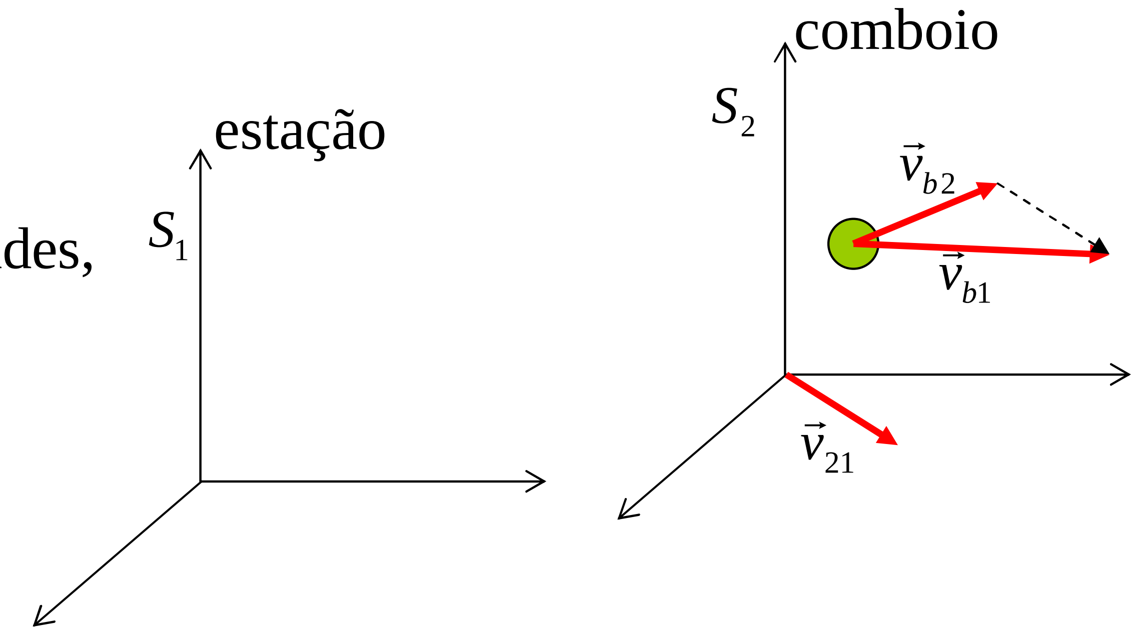
$$\boxed{\vec{v}_{b1} = \vec{v}_{b2} + \vec{v}_{21}}$$

TRANSFORMAÇÃO DE GALILEU:
As velocidades adicionam-se <u>vectorialmente</u>.

Aceleração no Movimento Relativo

Se um objecto tiver uma aceleração $\mathbf{a}_{b2}$ no referencial S_2, qual será a sua aceleração $\mathbf{a}_{b1}$ no referencial S_1, se a velocidade relativa entre os referenciais for constante (em módulo, direcção e sentido).

Ora, $\boxed{\vec{v}_{b1} = \vec{v}_{b2} + \vec{v}_{21}}$



Derivando a equação das velocidades,

$$\frac{d\vec{v}_{b1}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{b2}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{21}}{dt}$$

Mas, $\dfrac{d\vec{v}_{21}}{dt} = 0$

pois a velocidade relativa entre os referenciais é constante.

Assim, $\boxed{\vec{a}_{b1} = \vec{a}_{b2}}$

Dois referenciais cuja velocidade relativa é constante MEDEM a mesma aceleração. Consequentemente a mesma força.

(Não é necessário que estejam em repouso entre si)

Referenciais de Inércia

- Um referencial de inércia tem velocidade constante.
- Qualquer sistema de referência que se move com velocidade constante em relação a outro referencial de inércia é, ele próprio, um referencial de inércia
- Um sistema de referência que se move com velocidade constante em relação às estrelas distantes é a melhor aproximação a um referencial de inércia
- Podemos considerar a Terra como um referencial de inércia, ainda que possua uma aceleração centrípeta de pequeno módulo associada ao seu movimento de rotação

Forças de Inércia ou Fictícias

Se um objecto tiver uma aceleração $\mathbf{a}_{b2}$ no referencial S_2, qual será a sua aceleração $\mathbf{a}_{b1}$ no referencial S_1, <u>se a velocidade relativa entre os referenciais NÃO FOR CONSTANTE</u> (e.g. movimento circular)?

$$\boxed{\vec{v}_{b1} = \vec{v}_{b2} + \vec{v}_{21}}$$

$$\frac{d\vec{v}_{b1}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{b2}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{21}}{dt} \quad \text{derivando}$$

$$\vec{a}_{b1} = \vec{a}_{b2} + \vec{a}_{21}$$

2ª Lei de Newton num referencial não - inercial

Vamos supor agora que S_1 é um referencial de inércia e que S_2 é um referencial não-inercial,

$$\vec{a}_{b1} = \vec{a}_{b2} + \vec{a}_{n-inercial}$$

$$m\vec{a}_{b1} = m\vec{a}_{b2} + m\vec{a}_{n-inercial} \quad \text{multiplicando por } m$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_{b2} + m\vec{a}_{n-inercial} \quad \text{usando a 2ª Lei de Newton}$$

$$\sum \vec{F} + \left(-m\vec{a}_{n-inercial}\right) = m\vec{a}$$

Aceleração no sistema
não-inercial

Substituindo $\quad -m\vec{a}_{n-inercial} = \vec{F}_{inercia}$

$$\boxed{\sum \vec{F} + \vec{F}_{inercia} = m\vec{a}}$$

2ª Lei de Newton para um referencial não inercial

Temos que somar uma força "fictícia" chamada de inércia cujo valor é:

$$\vec{F}_{inercia} = -m\vec{a}_{n-inercial}$$

para que de novo possamos aplicar a 2ª Lei de Newton.

Aplicação ao movimento circular. Força centrifuga.

Na **direcção radial** do movimento circular temos duas perspectivas,

Ou a Perspectiva do observador inercial $\sum F = ma_c$

Ou a perspectiva do observador não-inercial **solidário** com o objecto que se move.

$$\sum F + F_{ci} = ma_{inercia}$$

$$\boxed{\sum F + F_{ci} = 0}$$

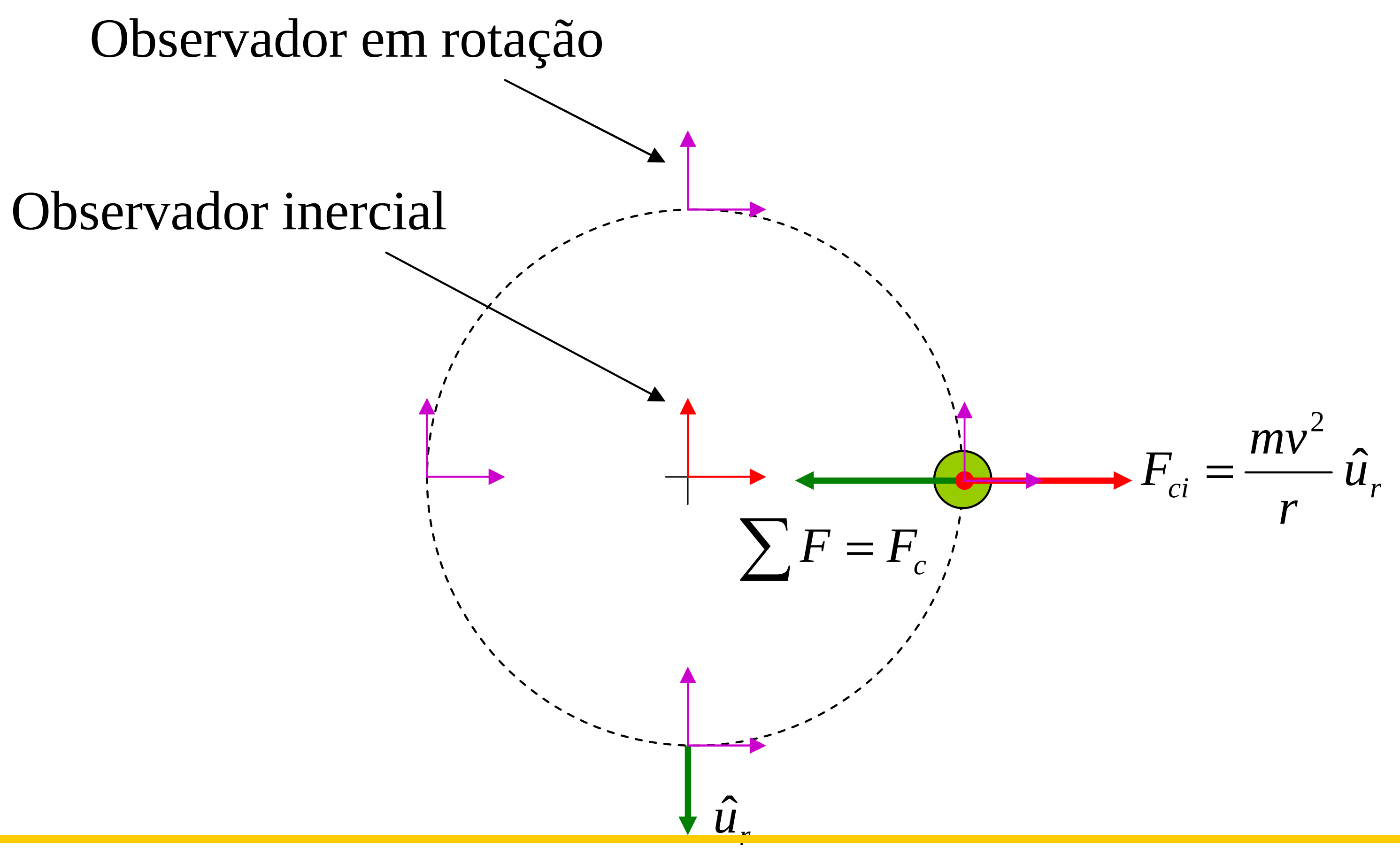
Neste último caso a força centrífuga aponta para fora do círculo,

$$F_{ci} = -ma_{inercial}$$

$$= -\left(-\frac{mv^2}{R}\hat{u}_r\right)$$

A resultante das forças aplicadas, na DIRECÇÃO RADIAL, mais a força centrifuga de inércia estão em equilíbrio.

Força centrípeta e centrifuga



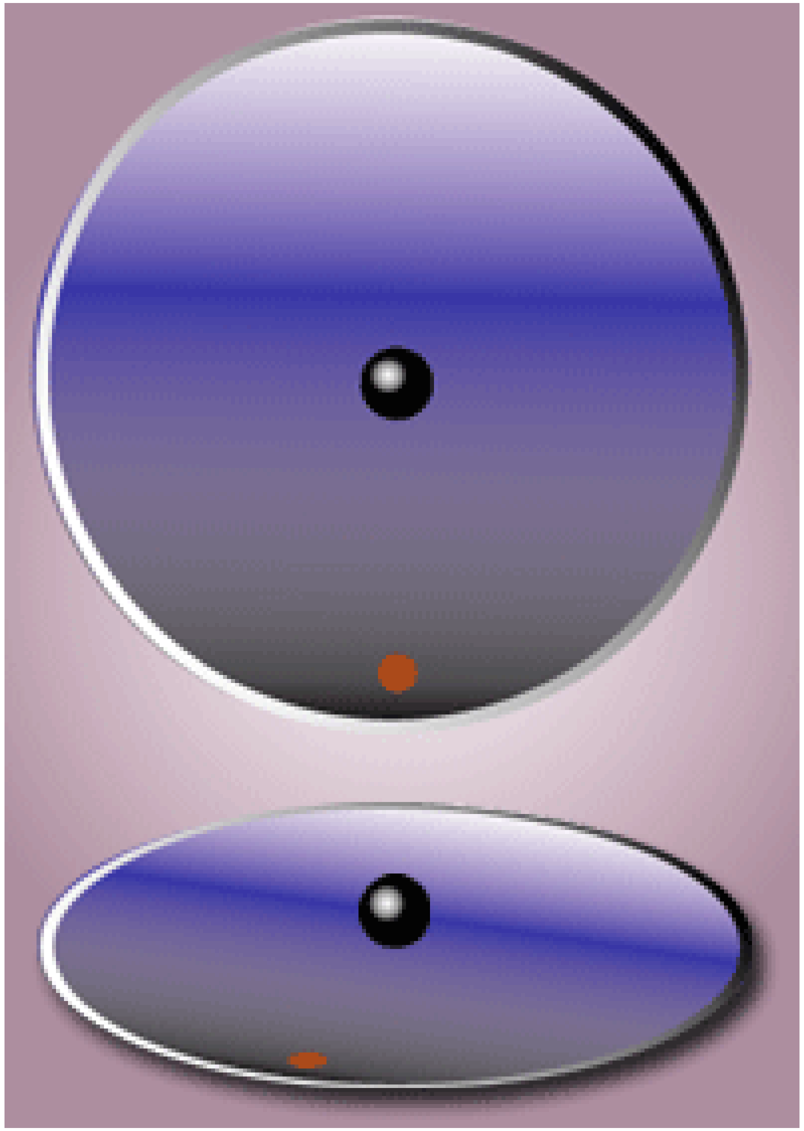
NOTA: Vectores radiais positivos apontam para fora do circulo.

A força centrípeta é a **resultante** das forças aplicadas na direcção radial e existe em qualquer referencial e a força centrífuga é o simétrico do produto da massa pela aceleração centrípeta e só existe no referencial não inercial.

Efeito de Coriolis

Uma criança no centro de um carrossel atira uma bola para outra que se situa na extremidade desse mesmo carrossel.

http://techtv.mit.edu/videos/3714-the-coriolis-effect
http://www.youtube.com/watch?v=lG3snOEis0w&feature=related



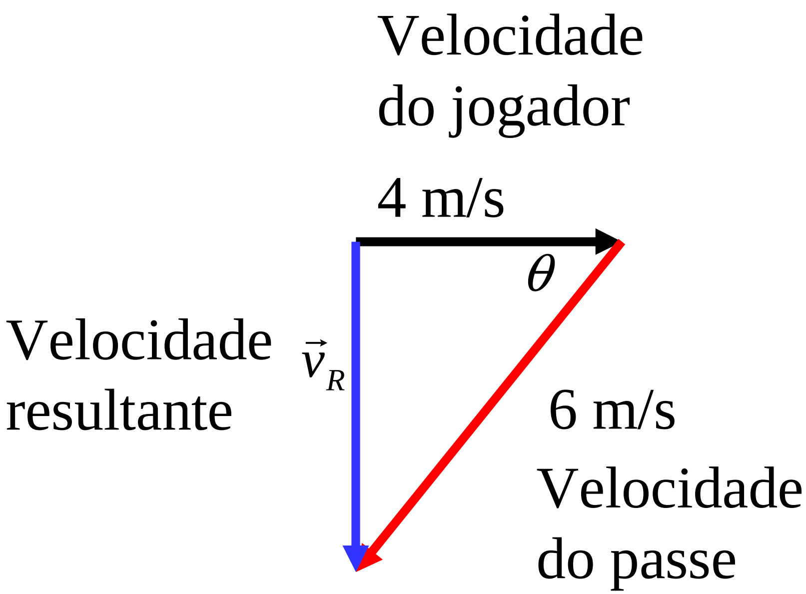
A criança no centro num referencial de inércia vê uma trajectória rectilínea.

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_{ni} + \underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{V}_{ni}}_{\text{acel. Coriolis}} + \underbrace{\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)}_{\text{acel. centripeta}}}$$

Ao contrario, a que está na extremidade, num referencial acelerado observa uma trajectória curvilínea

Movimento Relativo

Pelas regras do rugby um jogador pode passar a bola legalmente para um companheiro de equipe desde que o passe não seja para a frente. Suponha que o jogador corre paralelamente ao comprimento do campo e no sentido do golo da equipe adversária com uma velocidade de 4,0 m/s, enquanto passa a bola á velocidade de 6 m/s em relação a ele mesmo.
Qual é o menor ângulo contado a partir da direcção do avanço que mantém o passe legal. (48,2º)



$$\cos(\theta) = \frac{4}{6}$$

Movimento Relativo

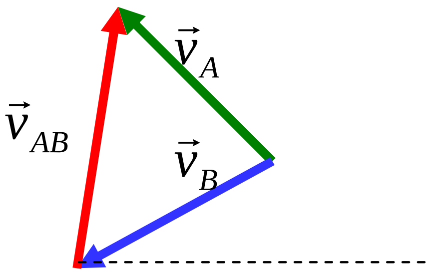
Dois navios A e B, saem do porto ao mesmo tempo. O navio A navega para o noroeste a 24 nós e o navio B navega a 28 nós numa direcção sudoeste fazendo 40º com o sul. (1 nó é igual a 1 milha marítima por hora)

(a) Quais são o módulo, a direcção e o sentido da velocidade do navio A em relação a B?

(b) Após quanto tempo os navios estarão afastados de 160 milhas marítimas?

(c) Qual será o rumo de B (a direcção da posição de B) em relação a A nesse instante?

(38.43 nós 88,5º na direcção nordeste medido a partir do Este; 4,16 h; 268,5º na direcção sudoeste, medido a partir do Este)



$$\vec{v}_A = 24\left(-\cos(45)\hat{e}_x + \sin(45)\hat{e}_y\right)$$

$$\vec{v}_B = 28\left(-\cos(50)\hat{e}_x - \sin(50)\hat{e}_y\right)$$

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 1.03\hat{e}_x + 38.42\hat{e}_y = 38.43\angle 88.5^{o}$$

$$r_{AB} = 38.43t \Rightarrow t = \frac{160}{38.43} = 4.16h$$

Movimento Relativo

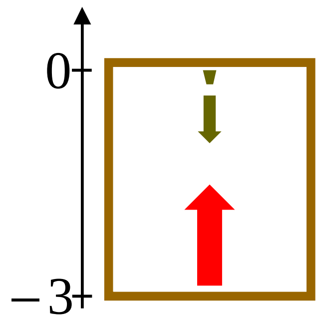
Um elevador eleva-se com uma aceleração de 2 m/s^2. No instante em que a velocidade é 2.4 m/s um parafuso cai do tecto do elevador situado a 3 m do solo.

(a) Quanto tempo demora o parafuso a atingir o solo?

(b) Que distância viajou o parafuso relativamente ao prédio até esse instante?

i) Movimento do parafuso relativamente ao prédio, quando começa a cair

$$y_p = 0 + 2.4t - \frac{1}{2}gt^2$$



ii) Movimento do solo do elevador relativamente ao prédio

$$y_s = -3 + 2.4t + \frac{1}{2}2t^2$$

iii) No instante em que se encontram, as alturas relativamente ao prédio são iguais.

$$t = 0.71s$$

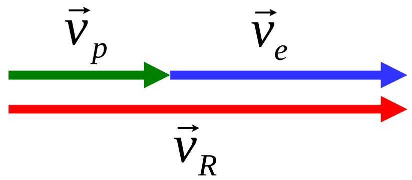
$$y(t = 0.71) = -0.8m$$

iv) Como o parafuso tem velocidade inicial positiva quer dizer que a distância total percorrida é,

$$d = 2h_{\max} + 0.8 = 2\frac{v_o^2}{2g} + 0.8 = 1.38m$$

Movimento Relativo

Uma pessoa sobe uma escada rolante *parada*, com 15 m de comprimento, em 90 s. Se a escada rolante estiver em movimento a pessoa leva 60 s.
Quanto tempo leva a mesma pessoa a ser transportada até ao cimo da escada rolante se subir a escada ao mesmo tempo que a escada rolante está em movimento?
A sua resposta depende do tamanho da escada? (36 s; Não)

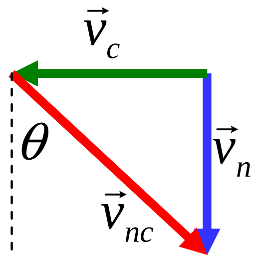


$$\vec{v}_p = \frac{15}{90}; \quad \vec{v}_e = \frac{15}{60}$$

$$\vec{v}_R = \frac{15}{90} + \frac{15}{60} = \frac{15}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{\frac{1}{90} + \frac{1}{60}} = 36s$$

Movimento Relativo

Está a cair neve verticalmente com uma velocidade de 7.8 m/s.
(a) Qual o ângulo com a vertical e
(b) a velocidade dos flocos de neve
relativamente a um carro cuja velocidade é 55 km/h?



$$\tan(\theta) = \frac{v_c}{v_n} = \frac{55/3.6}{7.8} \therefore \theta = 62.9^{\circ}$$

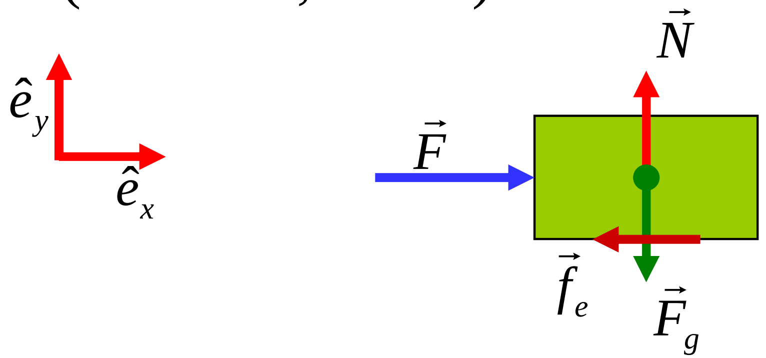
$$v_{nc} = \sqrt{v_c^2 + v_n^2} = 17.2\, m/s$$

Força e Movimento II

Uma cómoda com uma massa de 45 kg, incluindo aí gavetas e roupas, está apoiada sobre o chão.

(a) Se o coeficiente de atrito estático entre a cómoda e o chão for de 0,45 qual será a intensidade da força horizontal mínima que uma pessoa deve aplicar para fazer com que a cómoda se comece a mover.

(b) Se as gavetas e roupas, que juntas possuem uma massa de 17 kg, forem removidas antes de a cómoda ser empurrada, qual será a nova intensidade mínima? (R: 202 N; 126 N)

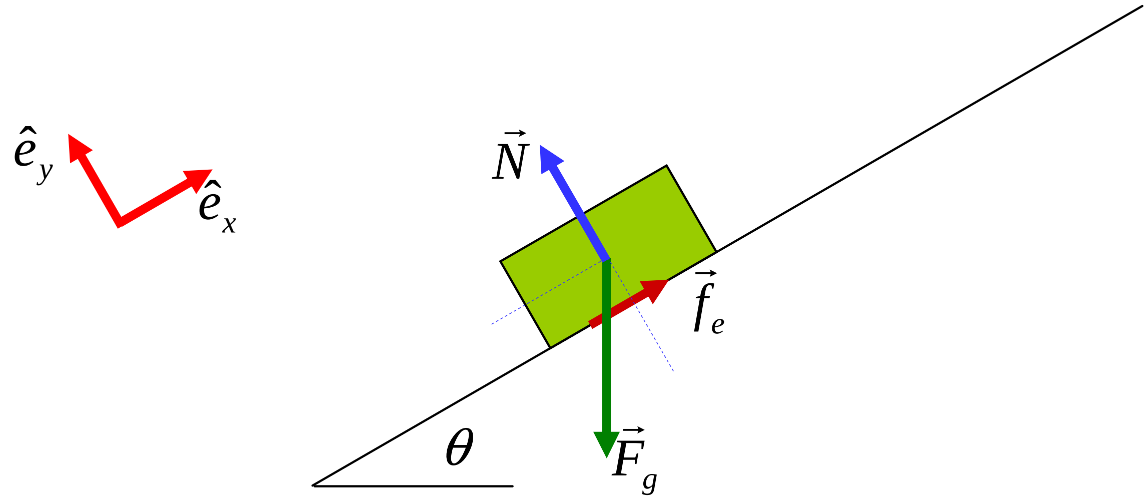


$$\begin{cases} N - F_g = 0 \\ F - f_e > 0 \text{ para se conseguir mover} \end{cases} \qquad F > \mu_e mg$$

$$f_{e,\max} = \mu_e N$$

O coeficiente de atrito estático entre o Teflon e os ovos mexidos é de aproximadamente 0,04.

Qual o menor ângulo, medido em relação à horizontal, que fará os ovos deslizarem no fundo de uma frigideira revestida com Teflon. (2,3º)

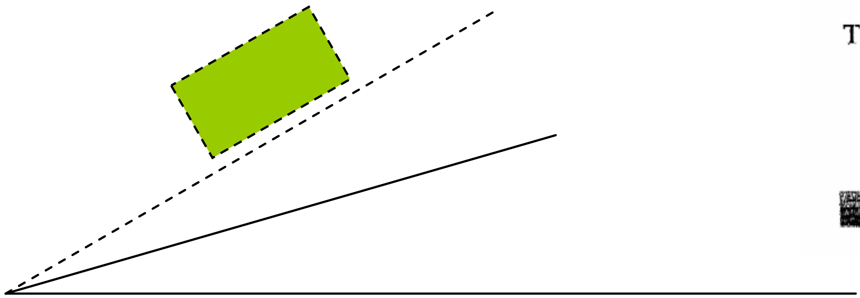


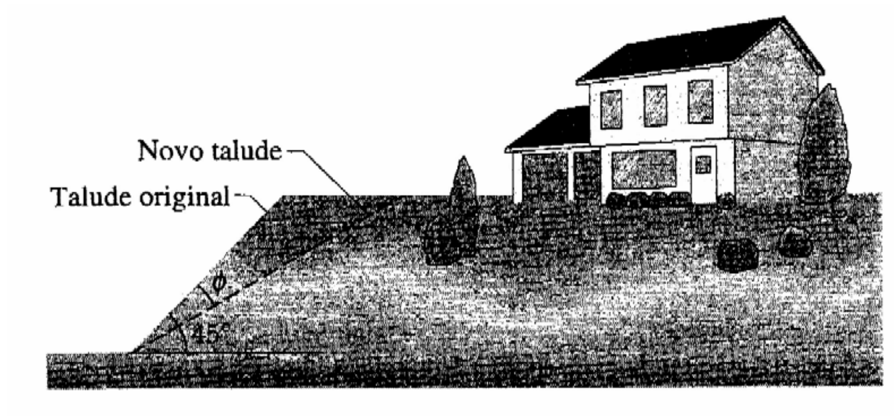
$$\begin{cases} N - F_g \cos(\theta) = 0 \\ F_g \sin(\theta) - f_e > 0 \text{ para se conseguir deslocar para baixo} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \tan(\theta) > \mu_e$$

$$f_{e,\max} = \mu_e N$$

Força e Movimento II

Uma casa é construída no alto de um morro que apresenta um talude próximo de 45º. Um estudo de engenharia indica que o ângulo do talude deveria ser reduzido, pois as camadas superiores do solo do talude poderiam escorregar sobre as camadas inferiores. Se o coeficiente de atrito estático entre as duas camadas é de 0,50, qual o menor ângulo θ que o talude deveria ser reduzido, para evitar o deslizamento? (18.4º)

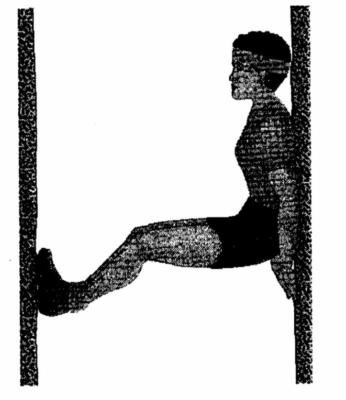




Do último problema conclui-se que para não escorregar,

$$\tan(\theta) < \mu_e \Rightarrow \theta < 26.6^{\circ}$$

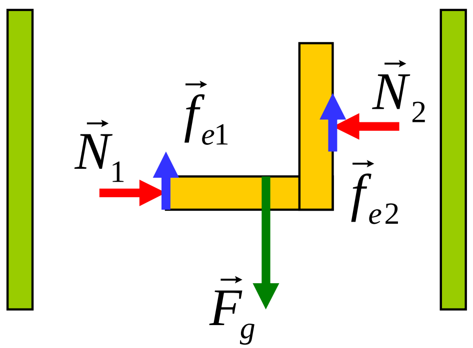
Na figura uma alpinista de 49 kg está a escalar uma chaminé entre duas paredes de rocha. O coeficiente de atrito estático entre os seus sapatos e a pedra é 1,2 e entre as suas costas e a pedra é de 0,80. Ela reduziu a força com que empurrava a pedra até que suas costas e seus sapatos estivessem na eminência de deslizar.



(a) Desenhe um diagrama de corpo livre para a alpinista.

(b) Qual a força com que ela empurra a pedra?

(c) Que fracção do seu peso é suportada pela força de atrito nos seus sapatos?

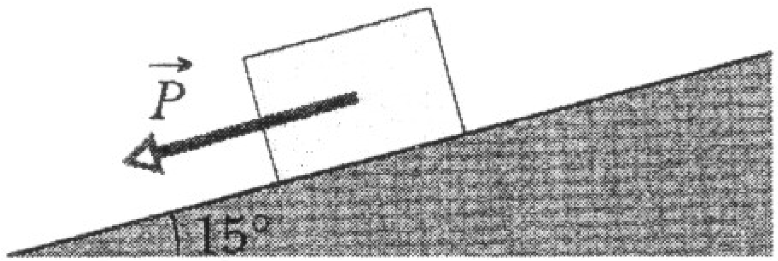


$$\begin{cases} N_1 - N_2 = 0 \\ f_{e1} + f_{e2} - F_g > 0 \end{cases}$$

$$f_{e1,\max} = \mu_{e1} N_1$$

$$f_{e2,\max} = \mu_{e2} N_2$$

Uma força P paralela a uma superfície inclinada de 15º, actua sobre um bloco de 45 N, como mostrado na figura. Os coeficientes de atrito entre o bloco e a superfície são μ_e=0,50 e μ_c=0,34. Se o bloco está inicialmente em repouso, determine o módulo, a direcção e o sentido da força de atrito que actua sobre o bloco para as seguintes intensidades da força P: (a) 5,0 N, (b) 8,0 N e (c) 15 N.



$$\begin{cases} P + F_g \sin(\theta) - f_a = ma \\ N - F_g \cos(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$f_{e,\max} = \mu_e N$$

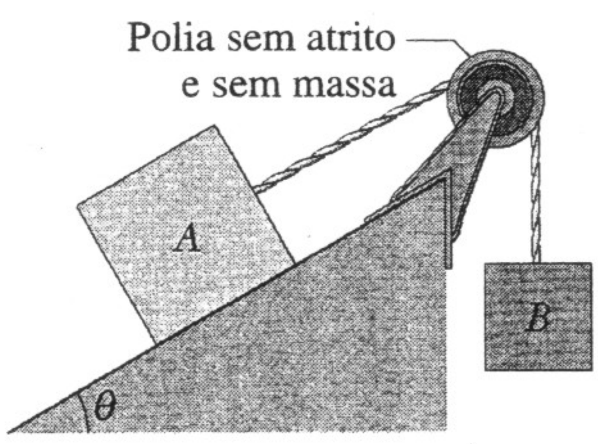
$$f_c = \mu_c N$$

O corpo desloca-se desde que a força aplicada mais a componente do peso paralela ao plano inclinado seja maior do que a força de atrito estático máxima.

a e b) f_e=16.6N; 19.6 N e c) f_c=14.8N

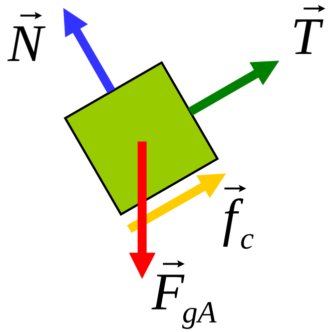
Forças e Movimento II. Problemas.

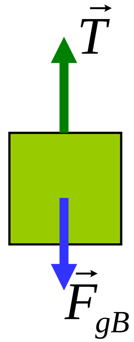
Na figura dois blocos estão ligados por um fio que passa por uma polia. A massa do bloco A é de 10 kg e o coeficiente de atrito cinético entre A e a rampa é de 0,20. O ângulo de inclinação da rampa é de 30º. O bloco A desliza para baixo com velocidade constante. Qual a massa do bloco B? (R: 3.3 kg)



$$\begin{cases} N - m_A g\cos(\theta) = 0 \\ m_A g\sin(\theta) - f_c - T = 0 \end{cases}$$

$$f_c = \mu_c N$$

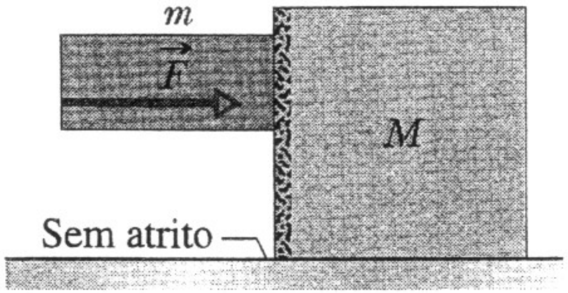


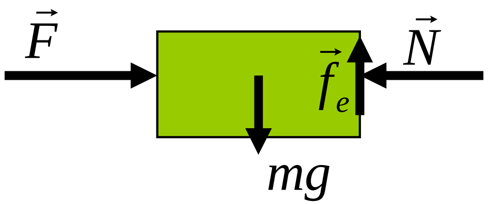


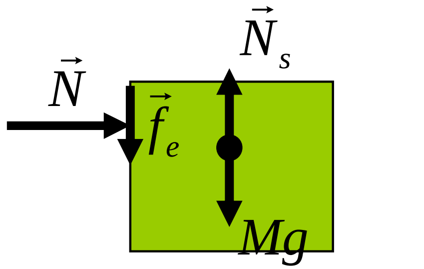
$$T - F_{gB} = 0$$

Forças e Movimento II. Problemas.

Os dois blocos (com m=16 kg e M=88 kg) mostrados na figura não estão presos um ao outro. O coeficiente de atrito estático entre os blocos é de μ_e=0,38, mas a superfície em baixo do bloco maior é lisa e sem atrito. Qual a menor intensidade da força horizontal F necessária para evitar que os blocos escorreguem entre si? (490N)







$$\begin{cases} F - N = ma \\ f_e - mg = 0 \end{cases}$$

$$f_{e,\max} = \mu_e N$$

$$\begin{cases} N = Ma \\ N_s - f_e - Mg = 0 \end{cases}$$

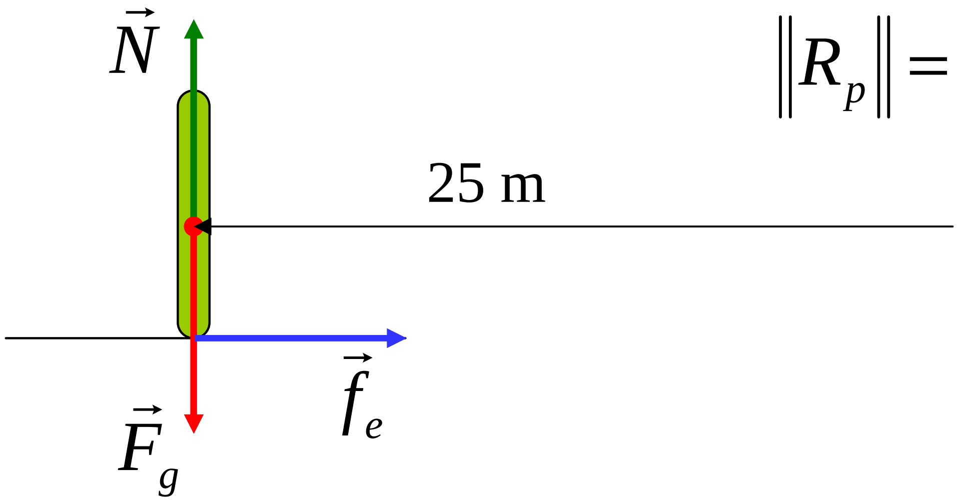
$$f_{e,\max} = \mu_e N$$

Forças e Movimento II. Problemas.

Um ciclista desloca-se num circulo de raio 25,0 m a uma velocidade constante de 9,00 m/s. O conjunto bicicleta-ciclista possui uma massa total de 85,0 kg. Calcule a intensidade (a) da força de atrito que a pista exerce sobre a bicicleta, (b) da força resultante que a pista exerce sobre a bicicleta. (275N; 893 N)

$$\begin{cases} N - F_g = 0 \\ f_e = m a_c \end{cases}$$

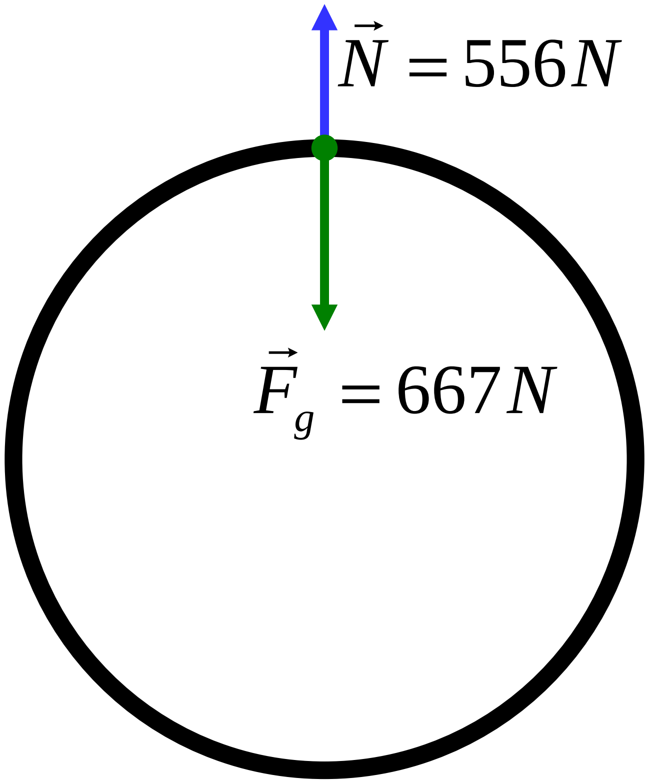
$$\left\| R_p \right\| = \sqrt{N^2 + f_e^2}$$



Nota: Na verdade o ciclista para não cair ao fazer a curva deve inclinar-se para dentro da curva por razões que veremos mais tarde.

Forças e Movimento II. Problemas.

Um estudante pesando 667 N passeia numa roda-gigante que gira a uma velocidade constante (o estudante está sentado com as costas erectas). No ponto mais elevado, a intensidade da força normal N que o assento exerce sobre o estudante é de 556 N. (a) O estudante sente-se mais leve ou mais pesado nessa posição? (b) Qual a intensidade de N no ponto mais baixo? (c) Qual a intensidade N’ se a velocidade com que a roda gira for duplicada? (leve; 1111 N)



No ponto mais elevado,

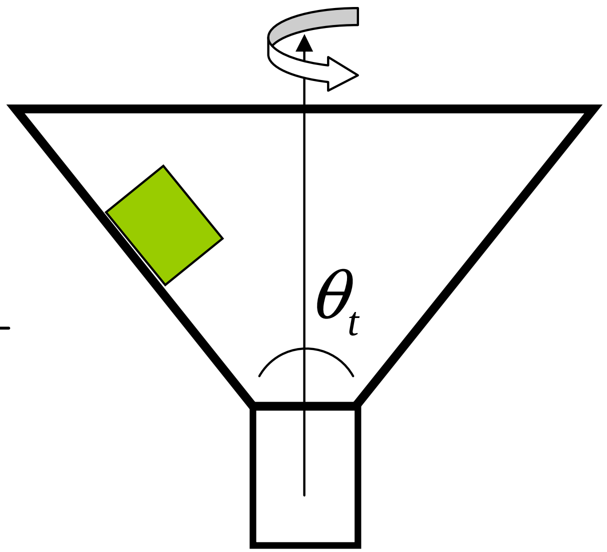
$$F_g - N = ma_c \Rightarrow N = F_g - \frac{mv^2}{r}$$

$$N' = F_g - \frac{m(2v)^2}{r}$$

$$= F_g - 4\frac{mv^2}{r}$$

$$= F_g + 4(F_g - N)$$

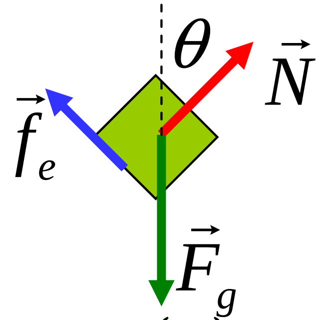
Um pequeno cubo de massa m é colocado no interior de um funil que roda com frequência f. Sabendo que o ângulo do funil é θ, que o coeficiente de atrito estático é μ_e e ainda que o cubo dista do eixo de rotação R, determine a gama de valores de f que faz com que o cubo se mantenha estacionário relativamente ao funil.



$$\theta = \frac{\theta_t}{2}$$

$$f_{\min} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\tan(\theta)\frac{g}{r}\frac{1-\mu_e}{1+\mu_e}}$$

Quando a velocidade é pequena:

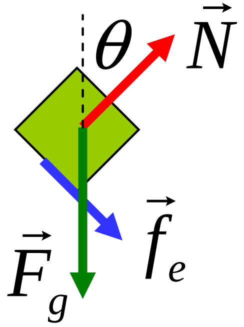


$$\begin{cases} N\cos(\theta) + f_e\cos(\theta) - F_g = 0 \\ N\sin(\theta) - f_e\sin(\theta) = ma_c \end{cases}$$

$$f_{e,\max} = \mu_e N$$

Forças e Movimento II. Problemas.

Quando a velocidade é grande:



$$f_{\max} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\tan(\theta)\frac{g}{r}\frac{1+\mu_e\cot(\theta)}{1-\mu_e\tan(\theta)}}$$

$$\begin{cases} N\cos(\theta) - f_e\sin(\theta) - F_g = 0 \\ N\sin(\theta) + f_e\cos(\theta) = ma_c \end{cases}$$

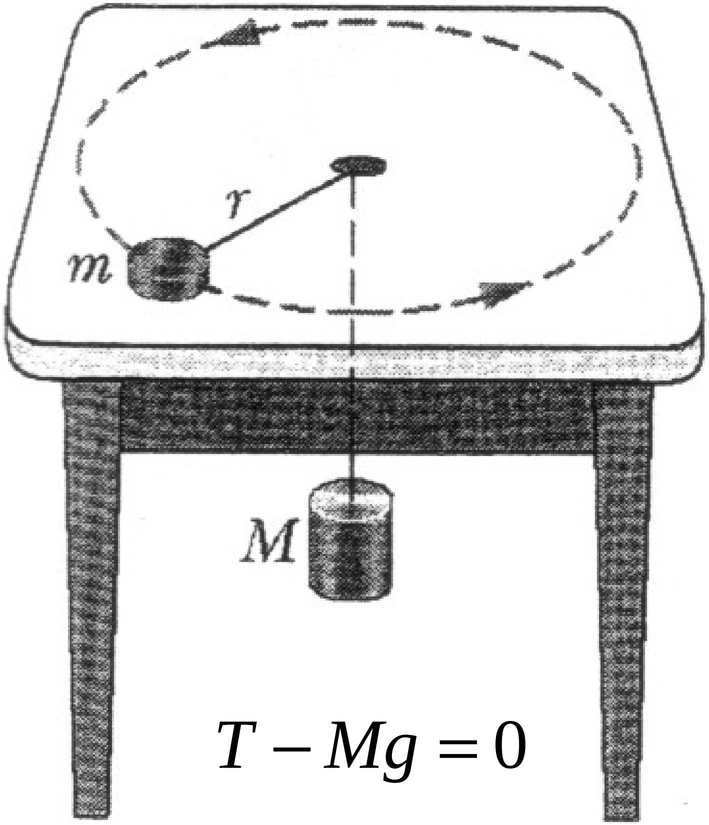
$$f_{e,\max} = \mu_e N$$

A frequência e a aceleração centrípeta estão relacionadas

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a_c}{r}}$$

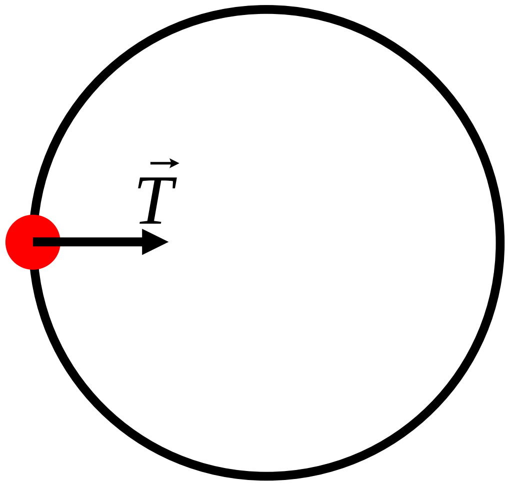
Um disco de hóquei no gelo de massa m desliza sobre uma mesa sem atrito, enquanto permanece ligado a um cilindro em repouso de massa M, pendurado por um fio que passa por um buraco feito na mesa. Que velocidade do disco mantém o cilindro em repouso?

$$v = \sqrt{\frac{M}{m} gr}$$



$$T - Mg = 0$$

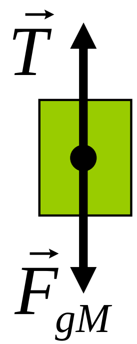
Objecto 1



$$T = ma_c$$

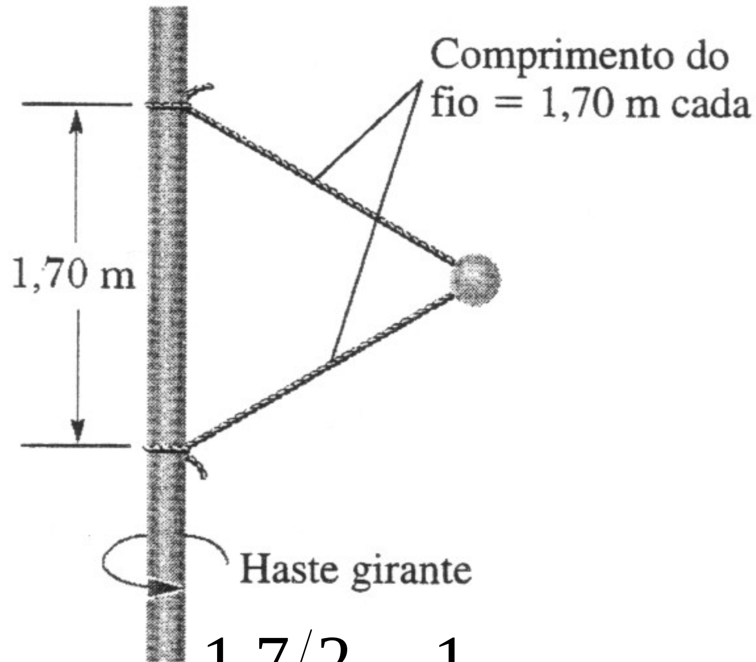
$$= \frac{mv^2}{r}$$

Objecto 2

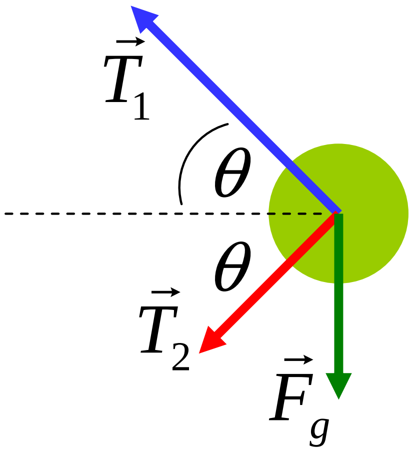


Forças e Movimento II. Problemas.

Como é mostrado na figura, uma bola de 1,34 kg está ligada, por dois fios de massa desprezável, a uma haste que gira em torno de um eixo vertical. Os fios estão ligados à haste e estão esticados. A tracção no fio de cima é de 35 N. (a) Desenhe o diagrama de corpo livre para a bola. (b) Qual a tracção no fio de baixo? (c) Qual a força resultante sobre a bola e (d) Qual a velocidade. (8,74 N; 37,9 N, na direcção radial para dentro; 6.45 m/s)



$$\sin(\theta) = \frac{1.7/2}{1.7} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^{o}$$



$$\begin{cases} T_1 \sin(\theta) - T_2 \sin(\theta) - mg = 0 \\ T_1 \cos(\theta) + T_2 \cos(\theta) = ma_c \end{cases}$$

A força resultante, já que a aceleração é centrípeta, é ma_c

Aula 9 - Trabalho e Energia Cinética

Trabalho. Definição.

Trabalho realizado pela Força Gravítica.

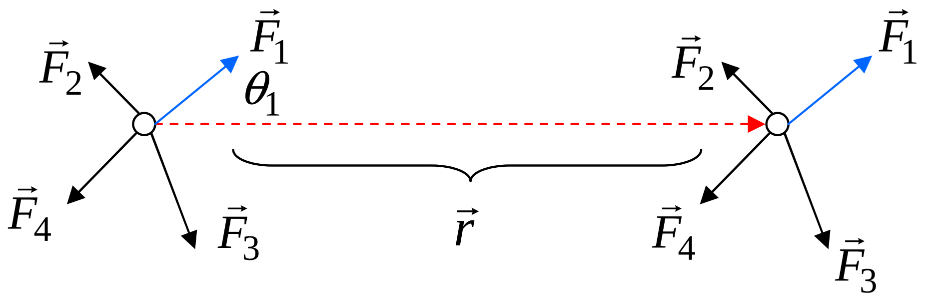
Trabalho realizado pela força elástica da mola.

Teorema da Energia Cinética.

Potência.

Trabalho e Energia. Trabalho efectuado por uma Força.

Definição: O trabalho W_1 realizado pela força F_1 é, $W_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{r} = \left|\vec{F}_1\right| \left|\vec{r}\right| \cos(\theta_1)$



θ_1 é o ângulo entre a força $\mathbf{F}_1$ e o vector-deslocamento **r**

O **Trabalho Total** é a soma dos trabalhos individuais efectuados por cada uma das forças

$$W_t = \sum W_i$$

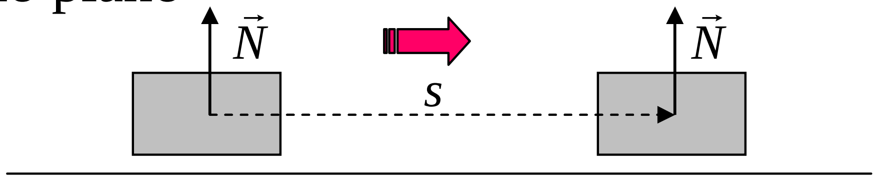
UNIDADES: As unidades de trabalho são N·m =Joule.

O trabalho é um escalar ou um vector?

NOTA: Embora a força seja invariante para todos os referenciais de inércia, o percurso ***r*** não é invariante. Por isso, o trabalho pode variar de observador para observador inercial.

Exemplos de trabalhos efectuados por Forças constantes

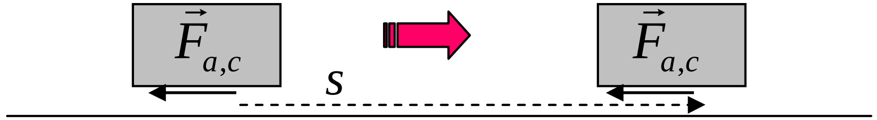
1. Trabalho realizado pela Força Normal ao plano



$$W_N = N\, s \cos(90) = 0$$

O trabalho realizado por forças perpendiculares ao deslocamento é nulo.

2. Trabalho realizado pela Força de Atrito Cinético

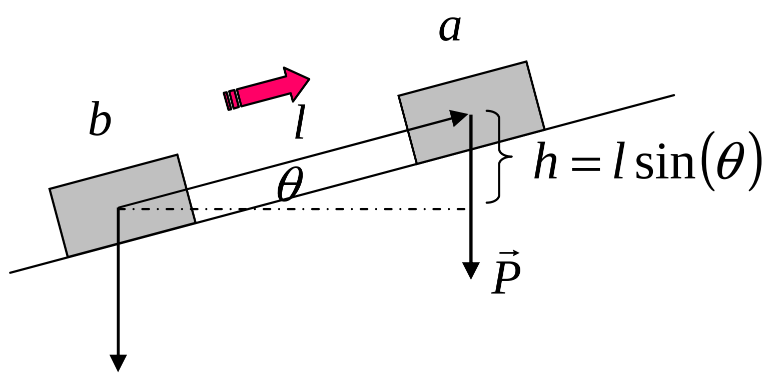


$$W_{Fa} = F_{a,c}\, s \cos(180) = -F_{a,c}\, s$$

A força de atrito cinético é contrária ao movimento e portanto o trabalho realizado por esta força é negativa.

3. Trabalho realizado pela Força Gravítica no movimento **ascendente** de um plano inclinado

$$W_P = \left|\vec{P}\right| l \cos(90+\theta) = -mgl\sin(\theta) = -mgh$$

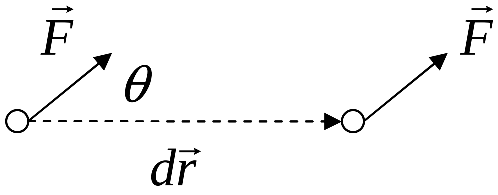


O trabalho realizado pelo peso não depende do ângulo do plano inclinado mas apenas do desnível entre as posições inicial e final.

Definição de trabalho Infinitesimal

Se a força ou o ângulo entre a força e o deslocamento variarem no percurso considerado a definição de trabalho continuará válida mas agora apenas para um percurso infinitesimal.

Sendo o percurso em causa infinitesimal,



$$dW = \left|\vec{F}\right| \cos(\theta) \left|d\vec{r}\right|$$

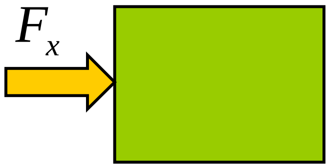
Trabalho infinitesimal

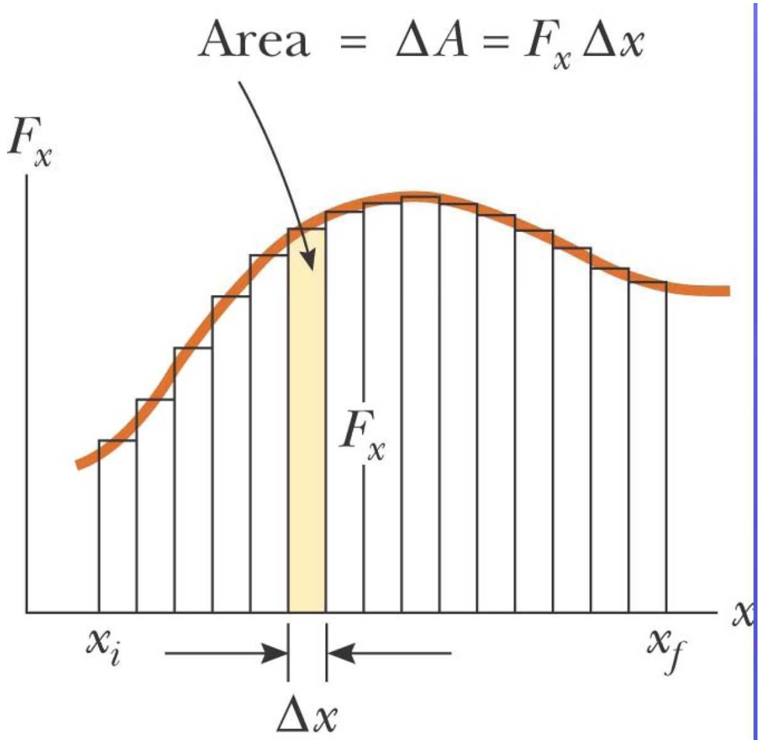
$$\boxed{dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

Para calcular o trabalho total devemos integrar para o percurso efectuado

$$\boxed{\begin{aligned} \int dW &= \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ W &= \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned}}$$

Força Variável mas constante em direcção





Note que:

$$F_x = F\cos(\theta)$$

Trabalho Total

$$\boxed{\int dW = W = \int_{x_1}^{x_2} F\cos(\theta)dx}$$

Sendo θ=cte, durante o trabalho efectuado

$$\boxed{\int dW = W = \cos(\theta)\int_{x_1}^{x_2} Fdx}$$

Forças aplicadas por molas

Mola no ponto de equilíbrio *Molas em tracção*

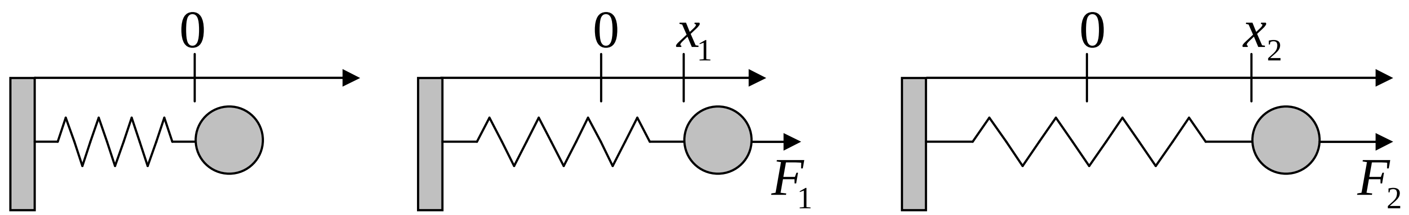
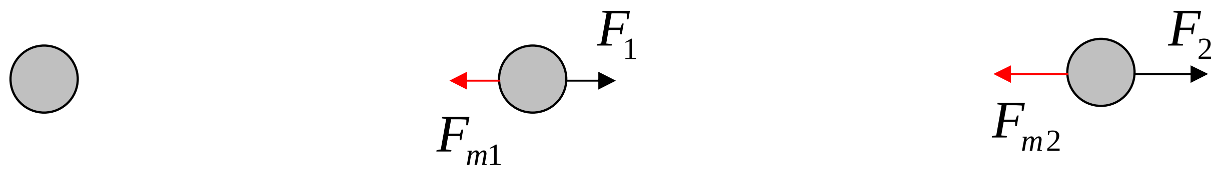
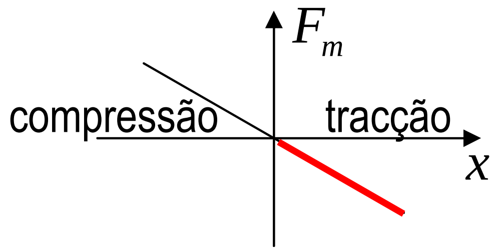


Diagrama do corpo livre



1. **A mola aplica no objecto uma força F_m no sentido contrário da sua extensão x, i.e. de forma a repor o seu comprimento inicial.**
2. *Quanto mais se desloca do equilíbrio, maior é o módulo da força aplicada pela mola no objecto,*

$$F_m = -kx$$

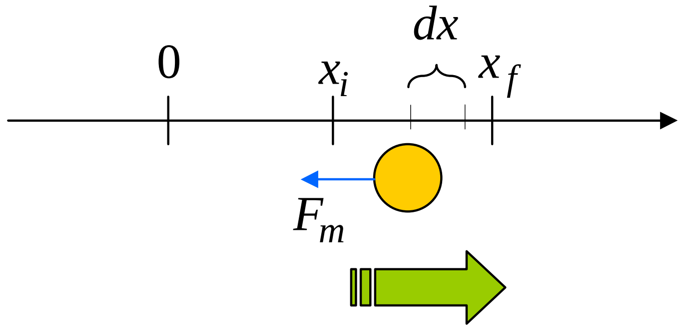


x é o deslocamento da extremidade da mola relativamente ao seu ponto de equilíbrio e

k é a constante da mola cujas unidades são *N/m*. Mede a sua rigidez.

Trabalho efectuado pela força de uma mola

Qual o trabalho realizado **pela força aplicada pela mola** **sobre o objecto,** quando este se desloca de x_i para x_f?



Num deslocamento infinitesimal *dx* entre x_i e x_f o trabalho infinitesimal *dW* é,

$$dW_m = \left|\vec{F}_m\right| \cos(180)\, dx$$

$$\int dW_m = \int_{x_i}^{x_f} kx(-1)\, dx$$

$$W_m = -\left(\frac{kx_f^2}{2} - \frac{kx_i^2}{2}\right)$$

Qual o sinal do trabalho efectuado pela mola quando nos afastamos do ponto de equilíbrio?

O trabalho resultante e a variação de energia cinética

O trabalho realizado por diversas forças aplicadas num corpo é,

$$dW = \left(\sum \vec{F}\right) \cdot d\vec{r}$$

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \cdots \\ &= dW_1 + dW_2 + \cdots \end{aligned}$$

Partindo da definição de trabalho infinitesimal,

$$\begin{aligned} dW &= \left(\sum \vec{F}\right) \cdot d\vec{r} \\ &= \left(\sum \vec{F}\right) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \quad \text{(multiplicando e dividindo por } dt\text{)} \\ &= \left(\sum \vec{F}\right) \cdot \vec{v} dt \\ &= \left(m \frac{d\vec{v}}{dt}\right) \cdot \vec{v} dt \quad \text{(pela Segunda Lei de Newton)} \\ &= m \frac{d\left(v^2/2\right)}{dt} dt \\ &= d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Integrando obtemos,

$$\boxed{\begin{aligned} W &= \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2} \\ W_1 + W_2 + W_3 + \cdots &= \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2} \end{aligned}}$$

Teorema do Trabalho-Energia: consequências

Podemos dizer que o trabalho total realizado sobre o corpo corresponde a variação da sua energia cinética sendo esta definida como:

ENERGIA CINÉTICA $E_c = \frac{mv^2}{2}$

$$W_1 + W_2 + W_3 + \ldots = \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} W &= E_{cf} - E_{ci} \\ &= \Delta E_c \end{aligned}}$$

1. **O trabalho da força resultante é igual ao somatório dos trabalhos efectuados por cada uma das forças aplicadas.**

2. **A soma do trabalhos efectuados pelas forças aplicadas, é igual á variação da energia cinética da partícula.**
   Este é o teorema do Trabalho - Energia.

Potência

A potência é o trabalho realizado por unidade de tempo: $\boxed{P = \dfrac{\Delta W}{\Delta t}}$

A potência instantânea é dada por: $P = \dfrac{dW}{dt}$

A potência de uma força **F** cujo ponto de aplicação se movimenta com velocidade **v** é,

$$\boxed{\begin{aligned} P &= \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \\ P &= \left|\vec{F}\right|\left|\vec{v}\right|\cos(\theta) \end{aligned}}$$

A unidade SI de Potência é o Watt = 1 J/s

Existem outras unidades de potência regularmente utilizadas como o cavalo-vapor, 1 Cv (hp - horse power) = 746 W

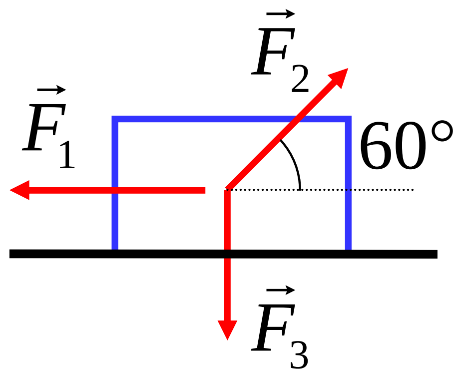
É costume definir uma unidade de trabalho/energia denominada kW·h que corresponde á energia produzida/consumida durante uma hora á taxa de 1 kW. A quantos Joules correspondem 1 kW·h?

Problema: Trabalho e Energia

A Figura mostra três forças aplicadas a um baú que se move 3,0 m para a esquerda sobre um piso sem atrito. Os módulos das forças são F_1=5,00 N, F_2=9,00 N e F_3=3,00 N. Durante o deslocamento,

(a) Qual o trabalho que as três forças realizam sobre o baú?

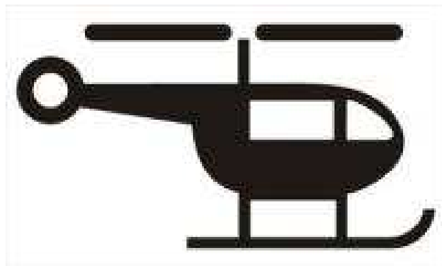
(b) A energia cinética aumenta ou diminui?



(W_1=15J; W_2=13.5J; W_3=0J; W_{total}=1.5J; aumenta de 1.5J)

Problema: Trabalho e Energia

Um helicóptero eleva uma astronauta de 72 kg verticalmente, 15m a partir do oceano, por meio de um cabo. A aceleração da astronauta é g/10. (a) Qual o trabalho realizado pelo helicóptero sobre a astronauta? (b) Pela força gravitacional que age sobre ela? (c) Qual a variação de energia cinética e (d) a velocidade da astronauta imediatamente antes de ela alcançar o helicóptero?



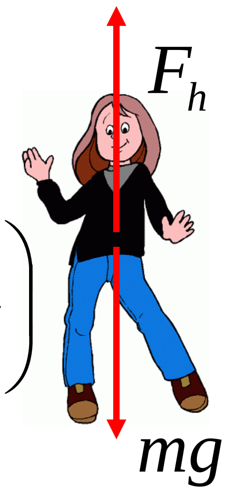
a) $W_h = F_h d\cos(0) = 11{,}88\,kJ$

b) $W_g = mg\cos(180) = -10{,}8\,kJ$

c) $\Delta E_c = W_h + W_g = 1{,}08 kJ$

d) $v = \sqrt{\dfrac{E_c}{m}} = 5{,}48\,m/s$

$$F_h - mg = m\left(\frac{g}{10}\right)$$



A mola A é mais rígida do que a mola B; isto é $k_A > k_B$. Qual das molas realizará mais trabalho resistente se as molas forem comprimidas,

(a) da mesma distância?

(b) pela mesma força aplicada?

(R: mola A; mola B)

$$W = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$$

a) $$W_A = \frac{1}{2}k_A x^2 > \frac{1}{2}k_B x^2 = W_B$$

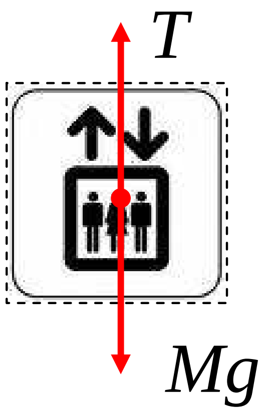
b) $$W_A = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k_A} < \frac{1}{2}\frac{F^2}{k_B} = W_B$$

Problema: Trabalho e Energia

A cabine carregada de um elevador possui uma massa de 3,0 x 10^3 kg e sobe 210 m em 23 s com velocidade constante.

Qual será a taxa média de trabalho realizado pela força do cabo do elevador sobre a cabine? (R: 273 kW)

$$\vec{a} = 0$$



A 2ª Lei de Newton aplicada á cabine,

$$T - Mg = 0 \Rightarrow \quad T = Mg$$

Potência,

$$P_w = Tv$$

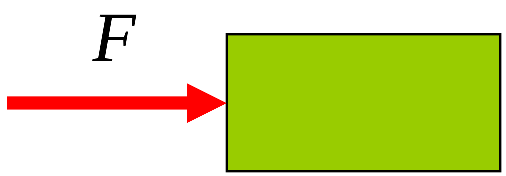
$$= mg\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = 273\,kW$$

Problema: Trabalho e Energia

Uma força de 5,0 N actua sobre um corpo de 15 kg inicialmente em repouso.

a) Calcule o trabalho realizado pela força no primeiro, no segundo e no terceiro segundos, e

b) A potência instantânea devida à força actuante no final do terceiro segundo.



R: 0.83J; 2.5J; 4.17J; 10 W

Pelo teorema da energia cinética

$$W = \Delta E_c = \frac{m}{2}(\Delta v)^2$$

$$mas, \quad v = at = \frac{F}{m}t$$

$$W = \frac{F^2 t^2}{2m}$$

Trabalho efectuado até ao instante t.

$$W(t_2) - W(t_1) = \Delta E_c(t_2) - \Delta E_c(t_1)$$

a)

$$= \frac{F^2}{2m}\left(t_2^2 - t_1^2\right)$$

Trabalho efectuado entre t_2 e t_1.

b)

Potência

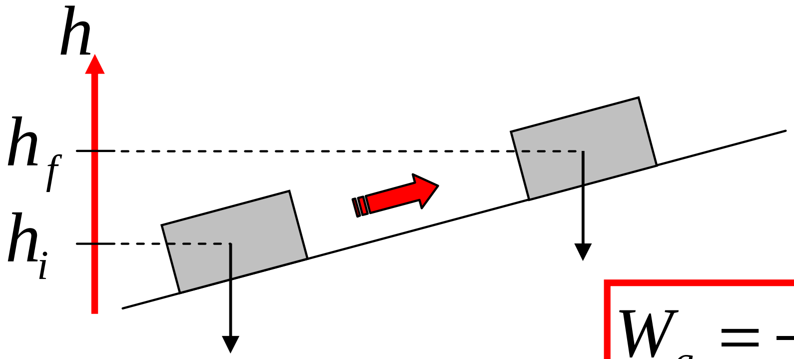
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F^2}{m}t$$

Energia Potencial e Conservação da Energia.

1. **Trabalho e Energia potencial**
2. **Forças Conservativas**
3. **Conservação da Energia**
4. **Aplicações**

Trabalho realizado pela força da Gravidade

O trabalho realizado pelo peso é *mgh* como já vimos antes,



$$\boxed{W_g = -mgh = -\left(mgh_f - mgh_i\right)}$$

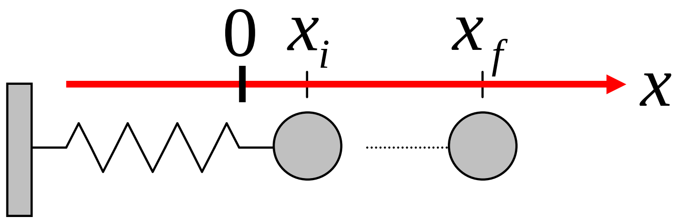
É independente da inclinação do plano inclinado e <u>só depende das alturas, inicial e final</u>.

Q: Se o corpo voltar à posição inicial qual será o trabalho total realizado pela força da gravidade?

Trabalho realizado pela força elástica de uma Mola

O trabalho efectuado pela força da mola sobre um corpo, quando o corpo se desloca de x_i para x_f, é dado por,

$$W_m = -\left(\frac{kx_f^2}{2} - \frac{kx_i^2}{2} \right)$$



<u>O trabalho só depende das posições inicial e final.</u>

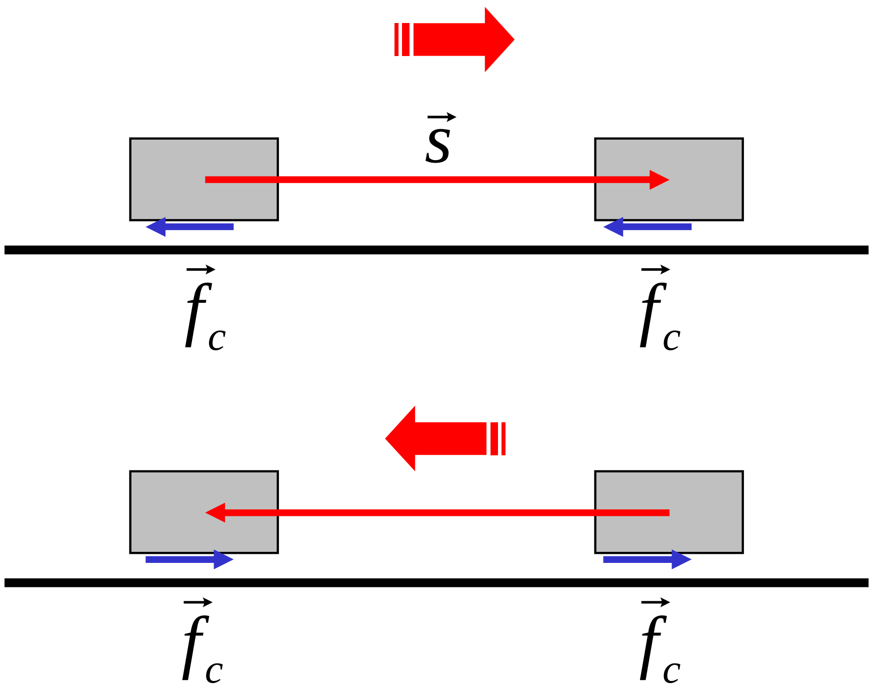
Q: Se o corpo voltar à posição inicial qual será o trabalho total?

Trabalho realizado pela força de Atrito Cinético

$$\boxed{W = -f_c s}$$

O trabalho realizado pela força de atrito cinético é sempre negativo. *Mesmo que o corpo volte á posição inicial*, o trabalho total não será nulo.

Q: A que será igual o trabalho total realizado pela força de atrito cinético?



Forças Conservativas

- As forças da gravidade e da mola chamam-se **forças conservativas**

- A força de atrito é uma força não-conservativa.

PROPRIEDADES DAS FORÇAS CONSERVATIVAS

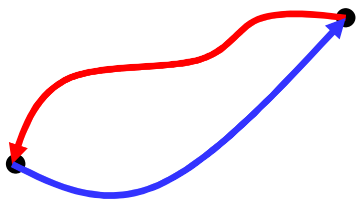
1. Num ciclo o trabalho de uma força conservativa é nulo.

2. O trabalho realizado por uma força conservativa **depende apenas das posições inicial e final** e é portanto, independente do caminho utilizado.

Energia Potencial

Se o trabalho de uma força conservativa depende apenas das posições final e inicial, então pode ser expresso pela variação no valor de uma função U(**r**), que dependerá apenas da posição da partícula.

$$U(\vec{r}_2) \equiv U(x_2, y_2, z_2)$$



$$U(\vec{r}_1) \equiv U(x_1, y_1, z_1)$$

Chama-se a essa função a energia potencial definida assim,

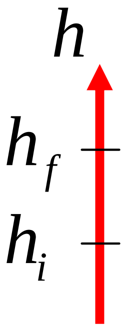
$$\begin{aligned} W &= -\Delta U \\ &= -\left(U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)\right) \\ &= -U(\vec{r}_2) + U(\vec{r}_1) \end{aligned}$$

Será que a partir da expressão geral para o trabalho de uma qualquer força conservativa, poderemos determinar a respectiva função energia potencial?

Energia Potencial Gravítica

Trabalho da força gravítica no movimento ascendente

$$W_g = -mgh = -(mgh_f - mgh_i)$$
$$= -mgh_f + mgh_i$$



Se definirmos a Energia potencial gravítica pela expressão:

$$\boxed{U_g = mgh}$$

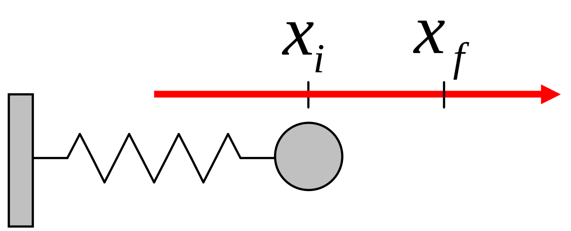
Atenção que h está sempre orientado para cima!

$$W_g = -U_{g,f} + U_{g,i}$$
$$= -(U_{g,f} - U_{g,i})$$
$$= -\Delta U_g$$

i.e. o simétrico da variação da energia potencial gravítica é igual ao trabalho da força da gravidade.

Energia Potencial Elástica

Trabalho da força da mola



$$W_e = -\left(\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}kx_f^2 + \frac{1}{2}kx_i^2$$

Se definirmos a Energia potencial da mola pela expressão:

$$U_e = \frac{1}{2}kx^2$$

$$W_e = -\frac{1}{2}kx_f^2 + \frac{1}{2}kx_i^2$$

$$= -\left(U_{e,f} - U_{e,i}\right)$$

$$= -\Delta U_e$$

i.e. o simétrico da variação da energia potencial elástica é igual ao trabalho da força da mola.

A variação na energia potencial e a força conservativa

Note que a derivada ***parcial*** da energia potencial numa determinada direcção é o simétrico da componente da força nessa mesma direcção. i.e.

$$dU = -dW$$

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_u = -\frac{\partial U}{\partial u}}$$

i.e. se derivarmos a energia potencial da direcção u obtemos a força na direcção u

Para a força da gravidade $\boxed{F_y = -\frac{\partial U_g}{\partial y} = -\frac{\partial (mgy)}{\partial y} = -mg}$

Para a força da mola $\boxed{F_m = -\frac{\partial U_m}{\partial x} = -\frac{\partial \left(\frac{1}{2}kx^2\right)}{\partial x} = -kx}$

Teorema da Energia Cinética, $\Delta E_c = W_g + W_e + W_3 + W_4 + W_5$

Na expressão acima considerámos que um dos trabalhos é realizado pela gravidade, um outro pela força elástica de uma mola para além de outras forças aplicadas.

Mas pela definição de energia potencial temos,

$$\left.\begin{aligned} W_g &= -\Delta U_g \\ W_e &= -\Delta U_e \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \Delta E_c = \left(-\Delta U_g\right) + \left(-\Delta U_e\right) + W_{nc}$$

O trabalho W_{nc} é o somatório de todos os trabalhos excluindo os trabalhos das forças gravítica e da mola. Manipulando e expandindo obtém-se,

$$\Delta E_c + \Delta U_g + \Delta U_e = W_{nc}$$

$$\left(E_{c2} + U_{g2} + U_{e2}\right) - \left(E_{c1} + U_{g1} + U_{e1}\right) = W_{nc}$$

Conservação da Energia Mecânica

Á soma das energias cinética e potenciais denominamos **energia mecânica,**

$$\boxed{E_{mec} = E_c + U_g + U_e}$$

Concluímos então que a variação da energia mecânica é igual ao trabalho das forças não conservativas, i.e.,

$$\boxed{\Delta E_{mec} = W_{nc}}$$

Quando o trabalho W_{nc}, das forças não-conservativas **é nulo, *a energia mecânica conserva-se***, i.e.

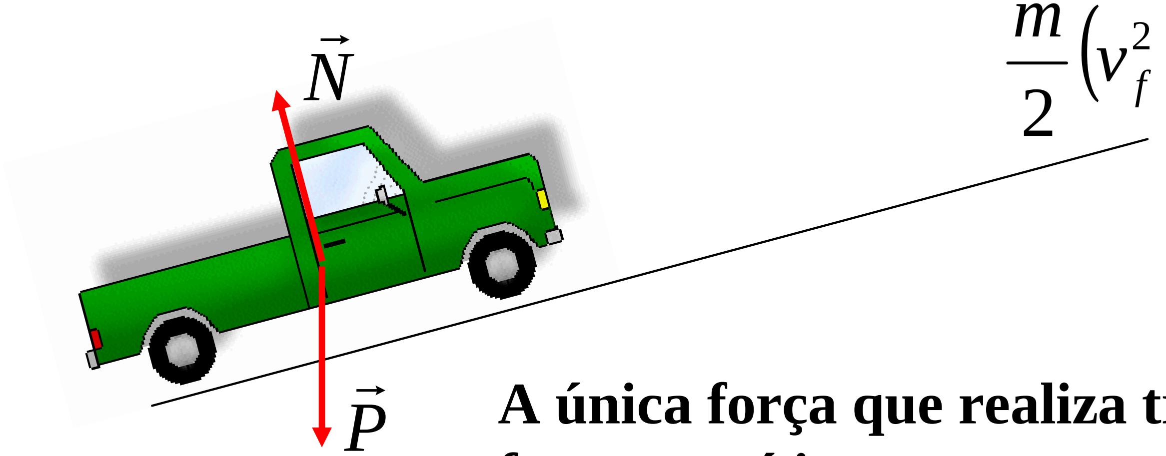
$$\boxed{W_{nc} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{mec} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{mec} = cte}$$

Energia potencial. Conservação de energia. Problemas.

Um camião desgovernado, cujo freio não funciona, move-se ladeira abaixo a 130 km/h, imediatamente antes de o motorista desviá-lo em direcção a uma rampa de emergência sem atrito e com inclinação para cima de 15º. A massa do camião é de 5000 kg. (a) Qual o comprimento mínimo L que deve possuir a rampa para que o camião pare ao longo dela? (b) Esse comprimento varia com a massa do camião? (c) E com a sua velocidade? (d) Esta rampa, em particular, serviria o propósito para que foi construída? (252 m; não; sim; não)

$$\Delta E_c + \Delta U_g = 0$$

$$\frac{m}{2}\left(v_f^2 - v_i^2\right) + mg\left(h_f - 0\right) = 0$$



$$h_f = \frac{v_i^2}{2g}$$

A única força que realiza trabalho é a força gravítica.

$$l = \frac{h_f}{\sin(15)}$$

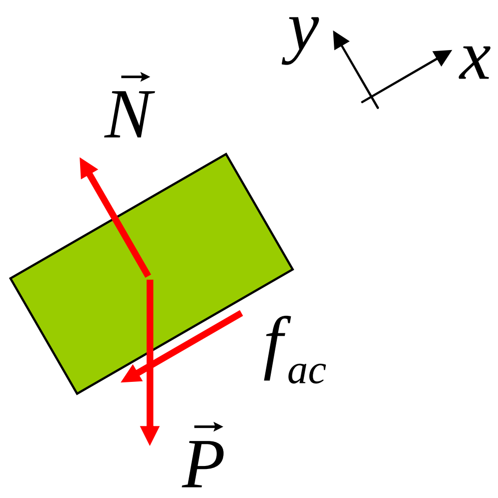
Problema: Trabalho e Energia

Um fardo de 4,0 kg começa a subir um plano inclinado de 30º com uma energia cinética de 128 J. Que distância conseguirá ele deslizar se o coeficiente de atrito cinético entre o fardo e o plano inclinado for de 0,30? (6.4 m)

Da conservação da E_{mec}

$$\Delta E_c + \Delta U_g = W_{nc}$$

$$\left(0 - E_{c,i}\right) + mg\left(l\sin(30) - 0\right) = -f_{ac}l$$



Da 2ª Lei de Newton:

$$\begin{cases} N - mg\cos(30) = 0 \\ -mg\sin(30) - f_{ac} = ma_x \end{cases}$$

$$f_{ac} = \mu_c N$$

$$\Rightarrow l = \frac{E_{c,i}}{mg\left(\sin(30) + \mu_c\cos(30)\right)} = 6.4m$$

Problema: Trabalho e Energia

Uma pedra de peso w é lançada no ar para cima, na direcção vertical, a partir do nível do solo com velocidade inicial v_o. Se uma força constante *f*, devida á força de arrasto do ar, actuar sobre a pedra do inicio ao fim do seu voo:

(a) Mostre que a altura máxima alcançada pela pedra será,

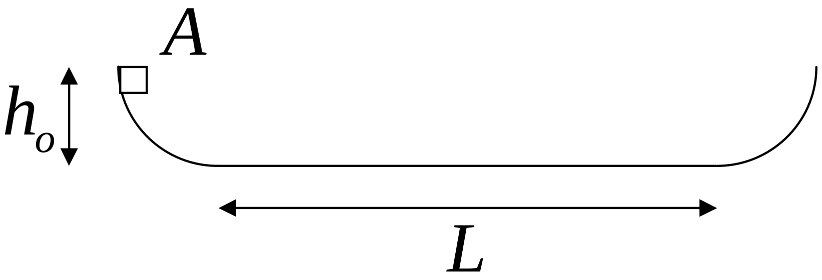
$$h = \frac{v_o^2}{2g(1 + f/w)}$$

(b) Mostre que a velocidade da pedra imediatamente antes do impacto contra o solo será,

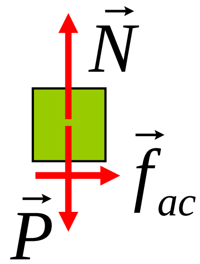
$$v = v_o \left(\frac{w - f}{w + f} \right)^{1/2}$$

Problema: Trabalho e Energia

Uma partícula pode deslizar ao longo de uma pista com as extremidades elevadas e uma parte central plana de comprimento L como se mostra na figura. Não há atrito nas partes curvas mas, na parte plana, o coeficiente de atrito cinético é 0,2. A partícula é solta do ponto A, a uma altura h_o=L/2. Aonde a partícula irá parar? (R: No meio do segundo trajecto para a direita)



A 2ª Lei de Newton na parte central



$$\begin{cases} N - mg = 0 \\ -f_{ac} = ma_x \end{cases}$$

$$f_{ac} = \mu_c N$$

Balanço de energia entre o instante inicial e final

$$\Delta E_c + \Delta U_g = 0$$

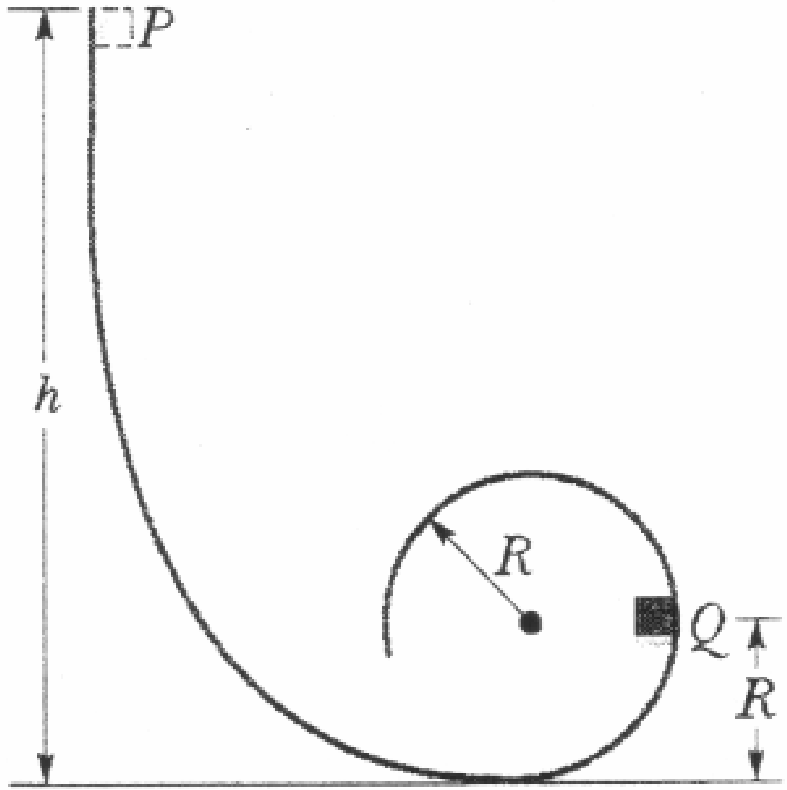
$$(0-0) + mg(0-h_o) = -f_{ac}s$$

$$s = \frac{mgh_o}{f_{ac}} = \frac{mgh_o}{\mu_c mg} = \frac{h_o}{\mu_c} = 2.5L$$

O percurso total é 2,5L

Problema: Trabalho e Energia

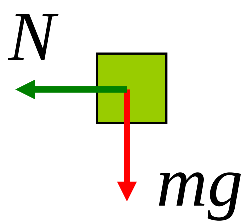
Na figura ao lado, considerando que não existe atrito, quais são (a) a componente horizontal e (b) a componente vertical da força resultante que age sobre o bloco e a velocidade no ponto Q? (c) De que altura h, o bloco deve ser solto do repouso, de modo a que esteja na iminência de perder contacto com a pista no ponto mais alto do *loop*? Faça um gráfico da intensidade da força normal sobre o bloco no ponto mais alto do *loop* em função da altura inicial na faixa de h=0 até h=6R. (Força normal e o Peso; 5R/2; N=mg[5-2h/R])



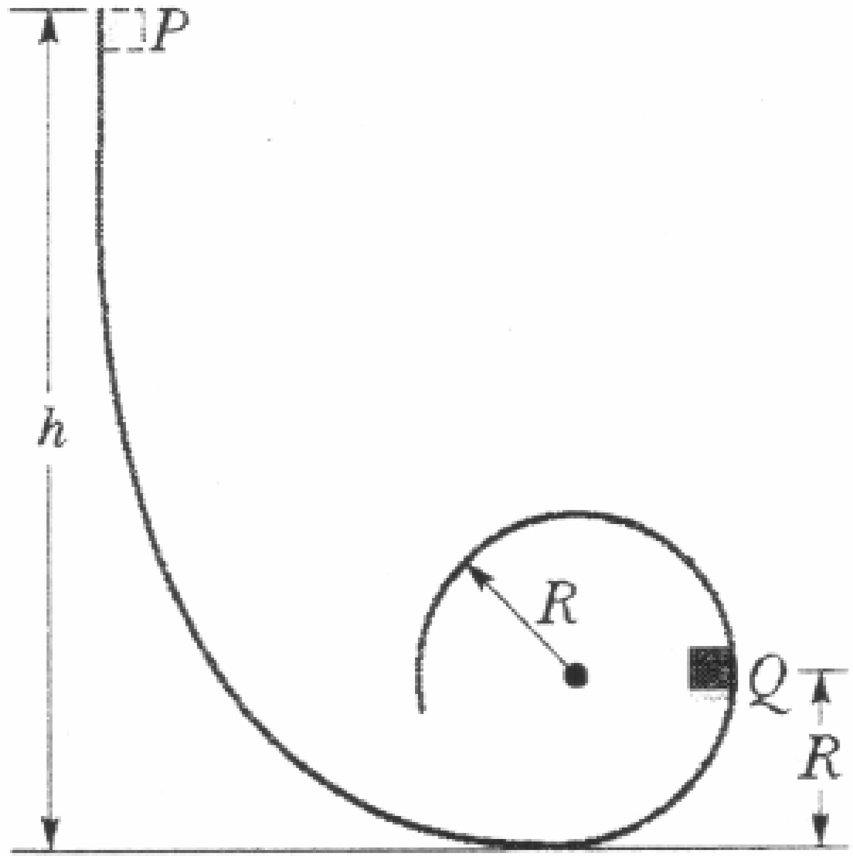
Problema (cont.)

a) Diagrama do corpo livre no ponto **<u>Q</u>**

(força normal)



(força tangencial)



A 2ªLei de Newton na direcção radial

$$N_Q = ma_c$$

$$= \frac{mv_Q^2}{R}$$

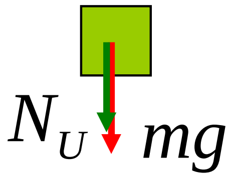
Da conservação de energia,

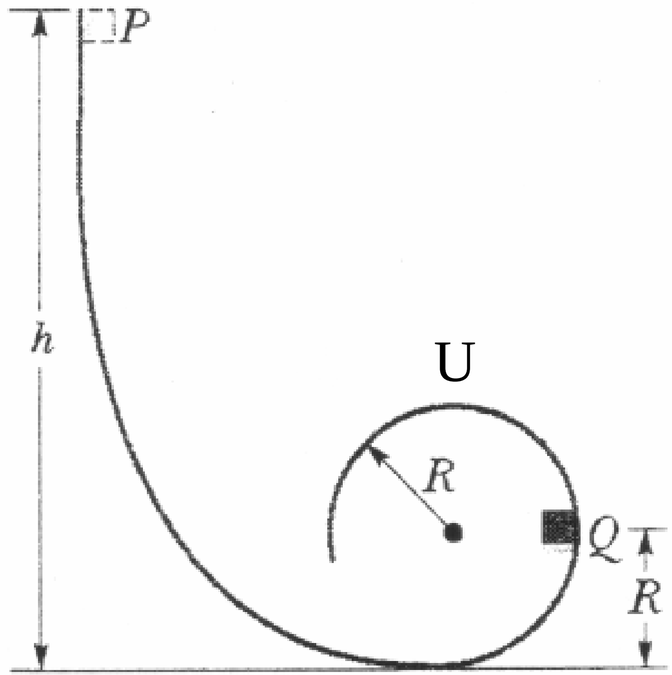
$$\Delta E_c + \Delta U_g = 0$$

$$\left(\frac{mv_Q^2}{2} - 0\right) + (mgR - mgh) = 0 \Rightarrow \quad N_Q = 2mg\left(\frac{h-R}{R}\right)$$

Problema (cont.)

Diagrama do corpo livre no ponto <u>U</u>





A 2ªLei de Newton na direcção radial

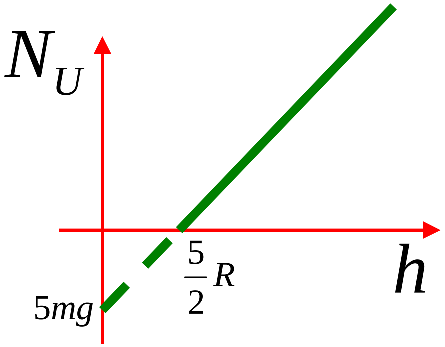
$$mg + N_U = \frac{mv_U^2}{R}$$

Da conservação de energia

$$\left(\frac{mv_U^2}{2} - 0\right) + \left(mg2R - mgh\right) = 0 \Rightarrow mv_U^2 = 2mg\left(h - 2R\right)$$

Reacção Normal:

$$N_U = \frac{2mgh}{R} - 5mg$$



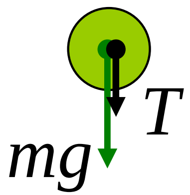
A velocidade mínima corresponde a N=0:

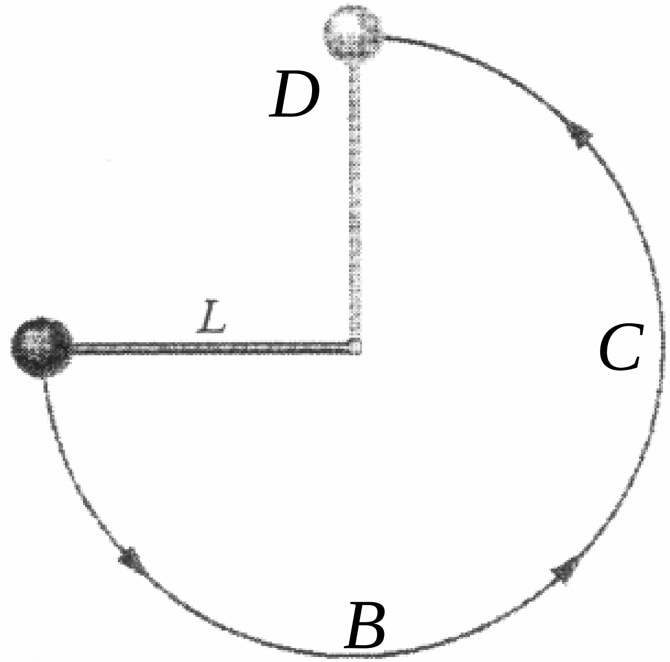
$$N_U = 0; \quad v_{\min}^2 = gR; \quad h = \frac{5}{2}R$$

Problema: Trabalho e Energia

Que velocidade inicial mínima deve ser dada á bola, ligada a um fio de comprimento L, para que alcance a máxima posição vertical? (b,c) Qual então as velocidades: no ponto mais baixo e no ponto do lado direito à mesma altura do ponto inicial? (d) Se a massa da bola duplicasse as suas respostas às alíneas anteriores aumentavam, diminuíam ou permaneceriam constantes? ((5gl)^1/2; (3gl)^1/2; constante)

a) No ponto mais alto





Pela 2ª Lei, $mg + T = ma_c$

$$= m\frac{v^2}{L}$$

A velocidade mínima corresponde á tensão nula no fio $v_{\min} = \sqrt{gL}$

Problema (cont.)

b) No ponto mais baixo, B, pela conservação de energia,

$$\left(\frac{mv_{\min}^2}{2} - m\frac{v^2}{2}\right) + (2mgL - 0) = 0$$

$$v = \sqrt{5gL}$$

No ponto C, também pela conservação de energia

$$\left(\frac{mv_{\min}^2}{2} - m\frac{v_C^2}{2}\right) + (2mgR - mgR) = 0$$

$$v_C = \sqrt{3gL}$$

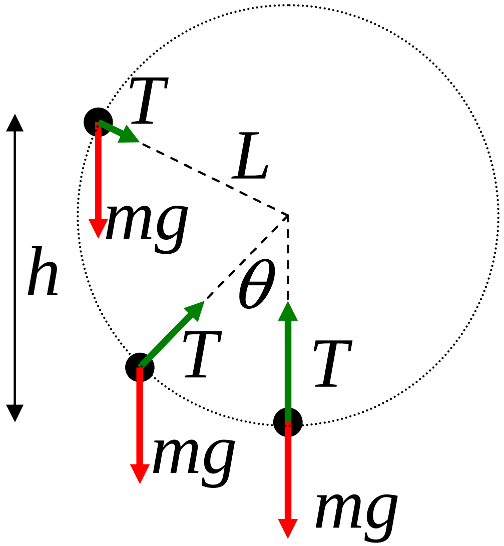
d) As respostas não dependem da massa

Problema: Trabalho e Energia

Tarzan, que pesa 688 N, salta de um penhasco balançando-se na extremidade de uma liana de 1.8 m de comprimento. Ele desce 2 m do alto do penhasco até ao ponto mais baixo em que larga a liana.

(a) Caso não se rompa, qual a maior força que actua sobre a liana durante o balanço?

(b) A liana rompe-se quando a força que actua sobre ela excede 950 N. Caso se rompa, qual será o ângulo com a vertical no instante da ruptura? (2216 N; 57.7º)



(a) No ponto mais baixo, pela 2ª Lei de Newton e pela conservação de energia:

$$T - mg = m\frac{v^2}{L}$$

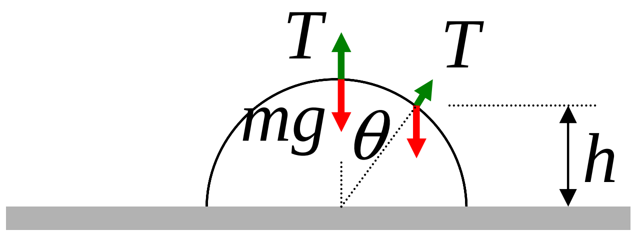
$$mgh + 0 = 0 + \frac{mv^2}{2}$$

(b) No ponto em que se rompe, pela 2ª Lei de Newton e pela conservação de energia:

$$T - mg\cos(\theta) = m\frac{v^2}{L}$$

$$mgh = mgL(1-\cos(\theta)) + \frac{mv^2}{2}$$

Um rapaz está sentado no topo de um bloco de gelo hemiesférico. Com um pequeno empurrão começa a deslizar ao longo da superfície do gelo. Mostre que ele perde o contacto com o gelo quando a sua altura for 2R/3.



(i) Ao longo do bloco e até perder o contacto tem-se,

$$mg\cos(\theta) - T = m\frac{v^2}{R} \quad \left(2^{\mathrm{a}}\,\text{Lei de Newton na direcção radial}\right)$$

$$\left(\frac{mv^2}{2} - 0\right) + \left(mgR\cos(\theta) - mgR\right) = 0 \quad \left(\text{Conservação de Energia}\right)$$

Problema (cont.)

(ii) Perde o contacto quando:

$$T = 0, \quad \text{Assim}$$

$$mg\cos(\theta) = m\frac{v^2}{R}$$

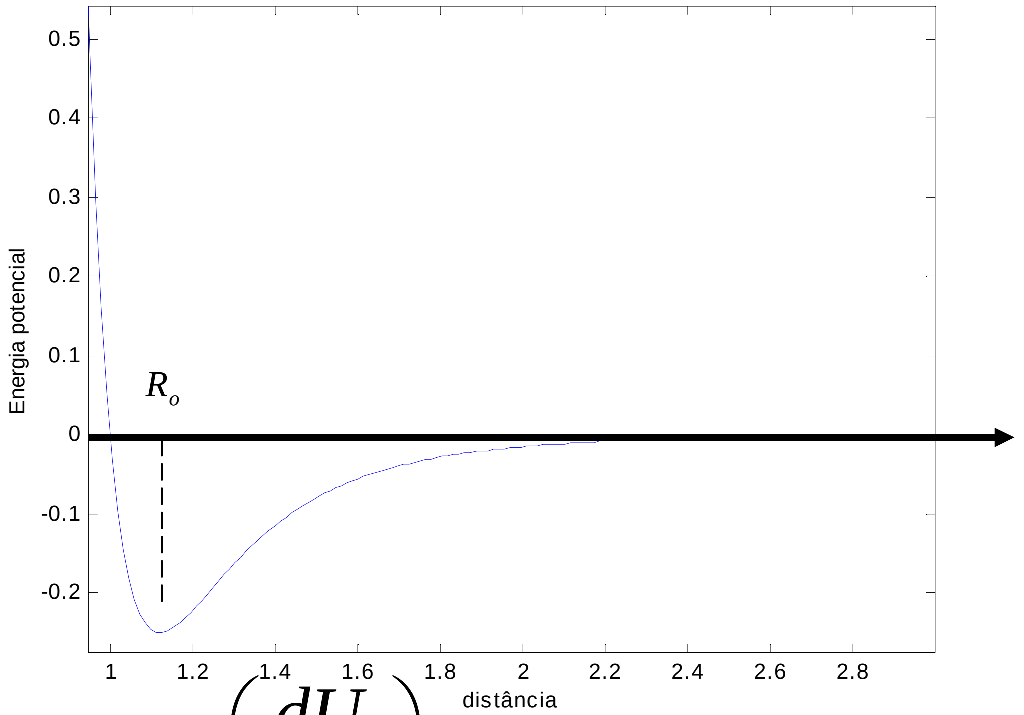
$$mgR = mgR\cos(\theta) + \frac{mv^2}{2}$$

$$\therefore \cos(\theta) = \frac{h}{R} = \frac{2}{3}$$

Energia potencial entre dois átomos

A energia potencial de uma molécula diatómica (um sistema de dois átomos como o H_2 ou o O_2) é dada por,

$$U = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^{6}}$$



onde r é a separação entre os dois átomos da molécula e A e B são constantes positivas. Esta energia potencial está associada à força que mantém os dois átomos juntos.

(a) Encontre a separação de equilíbrio R_o, isto é a distância para a qual a força de interacção não é nem repulsiva nem atractiva;

(b) Se a distância entre os dois átomos for maior que R_o a força de interacção é repulsiva ou atractiva? ((2A/B)^(1/6); atractiva)

$$F = \left(\frac{dU}{dr}\right)_{R_o} = 0$$

$$= \frac{(-12)A}{r^{13}} - \frac{(-6)B}{r^{7}} = 0$$

$$\therefore R_o = \sqrt[6]{\frac{2A}{B}}$$

Problema: Trabalho e Energia

Duas crianças jogam tentando atingir uma caixa no chão com um berlinde lançado por uma mola assente sobre uma mesa. A caixa está a uma distância de 2,20 m da extremidade da mesa medida na horizontal. Sabendo que, quando João comprimiu a mola de 1,10 cm o berlinde ficou a 0,27 m da caixa, de quanto deverá Rita comprimir a mola para que o seu tiro seja certeiro? (1.25 cm)

(i) **A velocidade á saída da mola** é, pela conservação da energia, $\frac{1}{2}kx_c^2 = \frac{1}{2}mv_{ox}^2$

$$v_{ox} = x_c\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(ii) A trajectória do berlinde é, na sua queda,

$$\begin{cases} x = v_{ox}t \\ y = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

(iii) No ponto em que atinge o solo, y=0 e x=*R*. Pelo que,

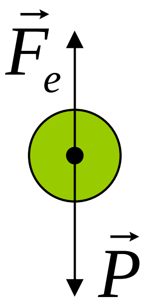
$$R = x_c\sqrt{\frac{k}{m}\frac{2h}{g}}$$

(iv) Chega-se a conclusão que o alcance *R* é proporcional á compressão inicial da mola pelo que,

$$\frac{2.2 - 0.27}{2.2} = \frac{1.1}{x_c} \therefore x_c = 1.25cm$$

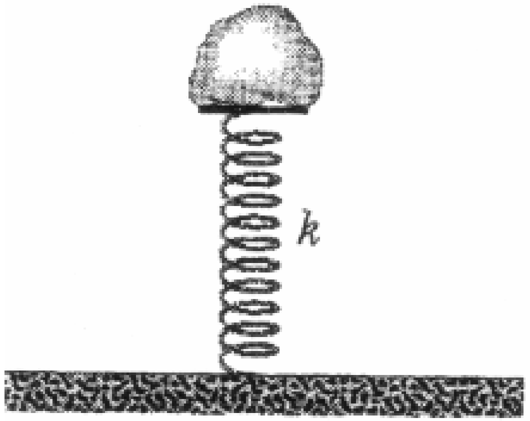
Problema: Trabalho e Energia

A figura mostra uma pedra de 8,00 kg em repouso em cima de uma mola. A mola está comprimida de 10,0 cm pela pedra. (a) Qual a constante da mola? (b) A pedra é empurrada para baixo mais 30,0 cm e é então solta. Qual a energia potencial elástica da mola comprimida imediatamente antes de a pedra ser solta? (c) Qual a variação da energia potencial gravitacional do sistema pedra-Terra quando a pedra se move do ponto em que foi comprimida até à altura máxima? (d) Qual será essa altura máxima, medida a partir do ponto em que a mola foi comprimida?



a) $kx_a - mg = 0$

$$k = \frac{mg}{x_a} = 800\,N/m$$



b) $U_e = \frac{1}{2}kx_b^2 = 64J$

c e d) A variação de energia potencial entre o ponto de maior compressão e o da altura máxima, pois não há variação de energia cinética, é:

$$\Delta U_g = -\Delta U_e = \frac{1}{2}kx_b^2 = 64J \Rightarrow \Delta h = 0.8m$$

Problema: Trabalho e Energia

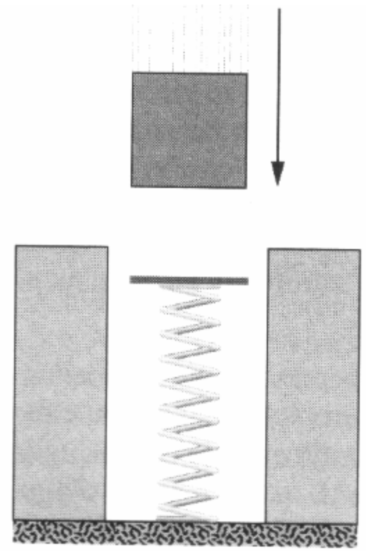
Um bloco de 250 g é solto sobre uma mola vertical sem deformação que possui uma constante da mola k = 2,5 N/cm. O bloco passa a ficar preso à mola comprimindo-a 12 cm antes de parar por um instante. Enquanto a mola estiver a ser comprimida, qual o trabalho realizado sobre o bloco

(a) pela força da mola?

(b) pela força gravitacional que age sobre ele e

(c) Qual velocidade da bloco imediatamente antes de acertar a mola? (Suponha que o atrito seja desprezável)

(d) Se a velocidade no impacto for duplicada qual será a compressão máxima da mola? (R:1.8J;-1.8J; 3.46m/s;)



Problema (cont.)

(a) Trabalho da força da mola

$$W_e = -\Delta U_e$$
$$= -\left(\frac{1}{2}kx_C^2 - 0\right)$$
$$=$$

A

B

C

(b) Pela Conservação da Energia entre A e C,

$$\Delta E_c + \Delta U_g + \Delta U_e = W_{nc}$$
$$0 + \Delta U_g + \Delta U_e = 0$$
$$\Delta U_g = -\Delta U_e$$

$$W_g = -\Delta U_g = \Delta U_e =$$

Problema (cont.)

(c)Pela Cons. da Energia entre B e C,

$$\Delta E_c + \Delta U_g + \Delta U_e = W_{nc}$$

$$\left(0 - \frac{mv_B^2}{2}\right) + \left(0 - mgx_B\right) + \left(\frac{kx_C^2}{2} - 0\right) = 0$$

$$v_B =$$

(d) Pela Cons. da Energia entre B e C,

$$\left(0 - \frac{m(2v_B)^2}{2}\right) + \left(0 - mgx_B\right) + \left(\frac{kx_C^2}{2} - 0\right) = 0$$

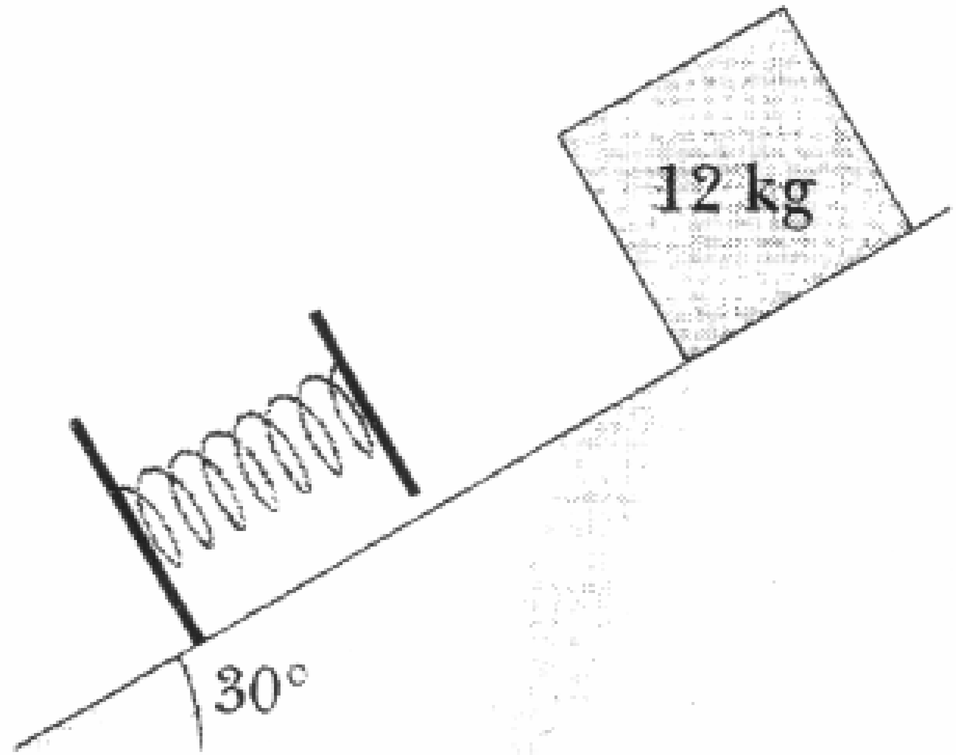
$$x_C =$$

Problema: Trabalho e Energia

Na Figura D, solta-se um bloco de 12 kg a partir do repouso numa rampa de 30º sem atrito. Abaixo do bloco está uma mola que pode ser comprimida 2,0 cm por uma força de 270 N. O bloco pára por um instante, ao comprimir a mola de 5,5 cm.

(a) Que distância percorre o bloco ao longo da rampa até parar?

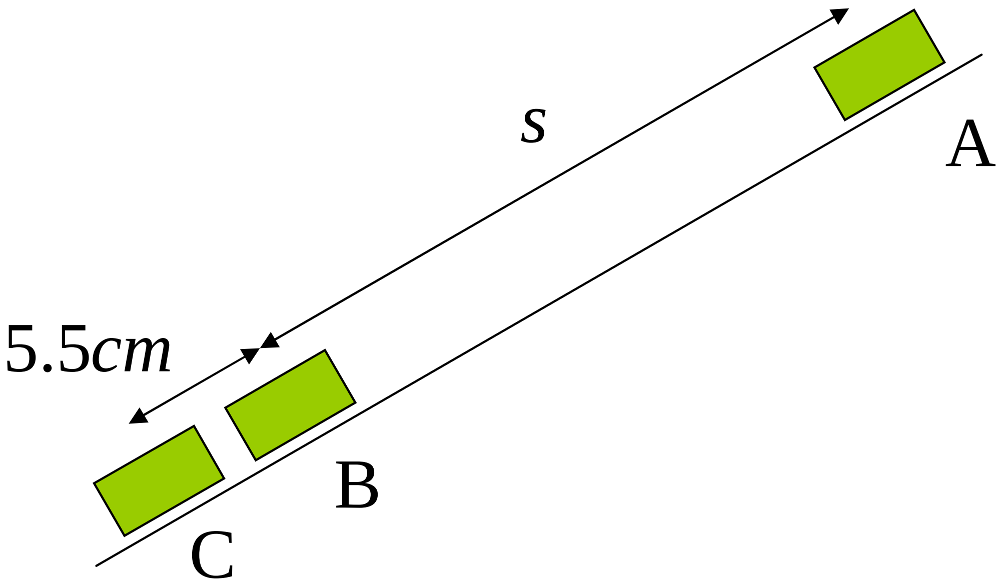
(b) Qual a velocidade do bloco no exacto momento em que toca a mola? (R: 0.34m; 1.69 m/s)



Problema (cont.)

Cálculo de k:

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{270}{0.02} = 13.50\,kN/m$$



Lei da Conservação de Energia

$$\Delta E_c + \Delta U_g + \Delta U_e = W_{nc}$$

a) Entre os pontos A e C

$$(0-0) + mg[0-(s+0.055)\sin(30)] + \left(\frac{1}{2}k\,0.055^2 - 0\right) = 0$$

$$\Rightarrow s + 0.055 = 0.34$$

b) Entre os pontos A e B

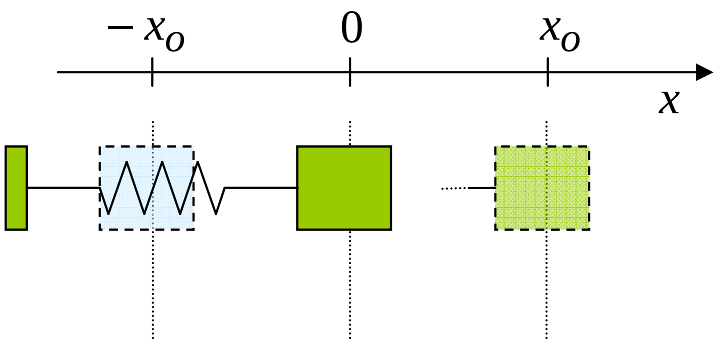
$$\left[\frac{mv_B^2}{2} - 0\right] + mg(-s\sin(30)) = 0$$

$$v_B = 1.69\,m/s$$

Aula 13

1. Movimento oscilatório.
2. Energias mecânica, potencial e mecânica.
3. Equação do movimento.
4. Movimento harmónico simples.
5. Aplicações

Movimento Oscilatório. Energias

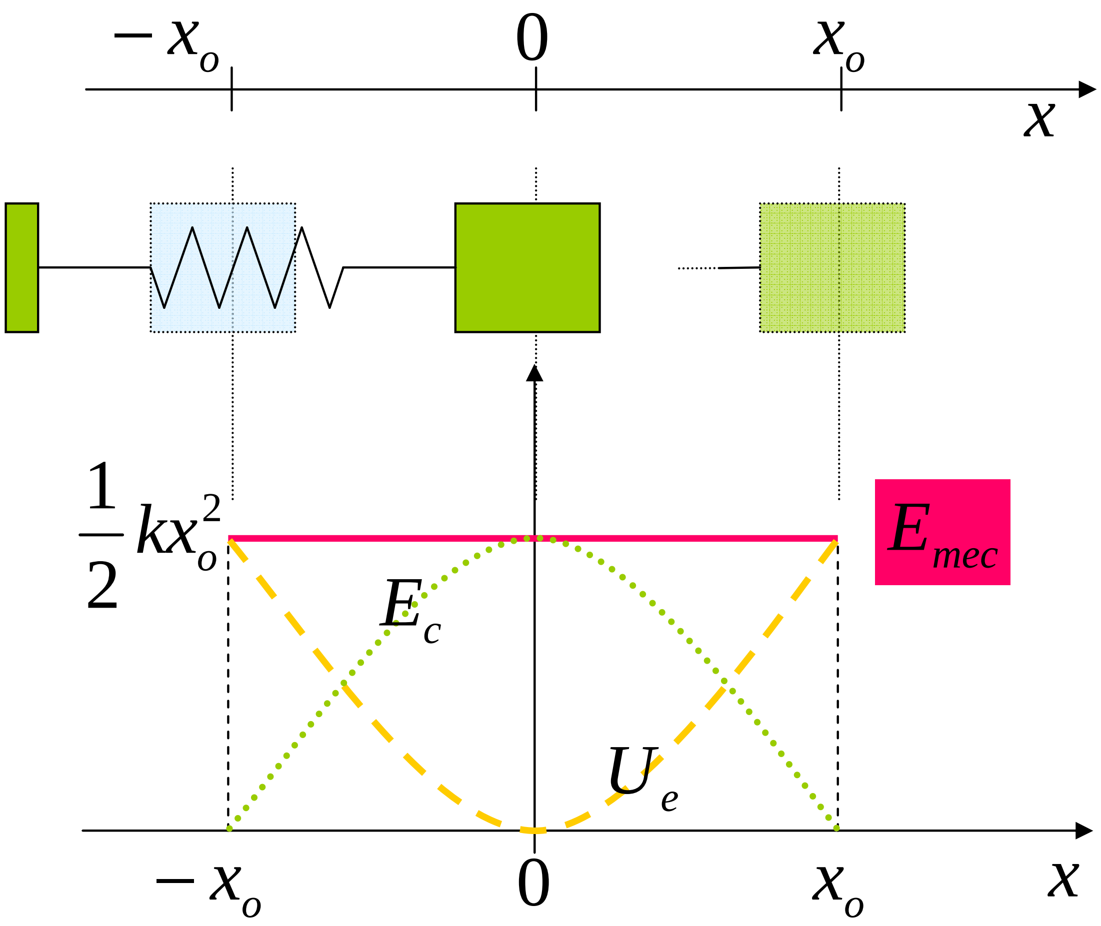


Sistema mola + massa deslizando sobre uma superfície sem atrito

Q: O que acontece se puxarmos o bloco de massa m até á posição x_o e o largarmos em seguida?

R: O bloco vai oscilar entre as posições x_o e $-x_o$

Energias cinética, potencial e mecânica



Energia Potencial Elástica

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}kx^2}$$

Energia Cinética

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

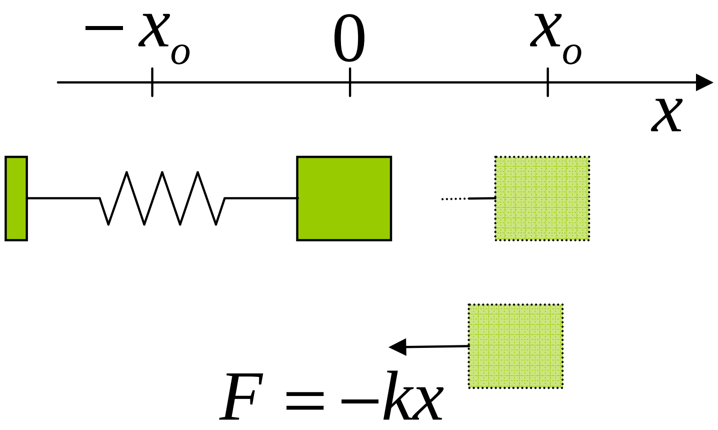
Energia Mecânica

$$\boxed{E_{mec} = U_e + E_c = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = cte = \frac{1}{2}kx_o^2}$$

No movimento oscilatório massa-mola há uma troca permanente entre dois tipos de energia: a energia potencial da elástica da mola e a energia cinética da massa.

Quando uma das energias é máxima a outra é mínima e reciprocamente.

Dinâmica do movimento no sistema Massa-Mola



2ª Lei de Newton:

$$a = \frac{F}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-kx}{m}$$

Equação ***diferencial*** do movimento oscilatório:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x = x(t)?$$

NOTA: Numa equação diferencial a incógnita não é o valor de uma variável mas, uma função que torna verdadeira a dita equação.

Solução da equação diferencial

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0}$$

A função que verifica a equação diferencial é: $\boxed{x=A\cos(\omega t+\phi)}$

Mostre que a função proposta verifica a equação diferencial desde que,

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

O <u>período</u> do movimento é proporcional á raiz quadrada da massa do bloco e inversamente proporcional á raiz quadrada da constante da mola.

$$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Amplitude do movimento oscilatório

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

Fase ou ângulo inicial

Frequência angular do movimento oscilatório

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

NOTA: Chama-se MOVIMENTO HARMÓNICO SIMPLES (MHS) porque as funções seno e coseno são conhecidas na matemática por funções harmónicas.

Movimento Harmónico Simples

Sabendo a posição em função do tempo podemos calcular a velocidade e aceleração:

A posição

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \phi)}$$

A velocidade

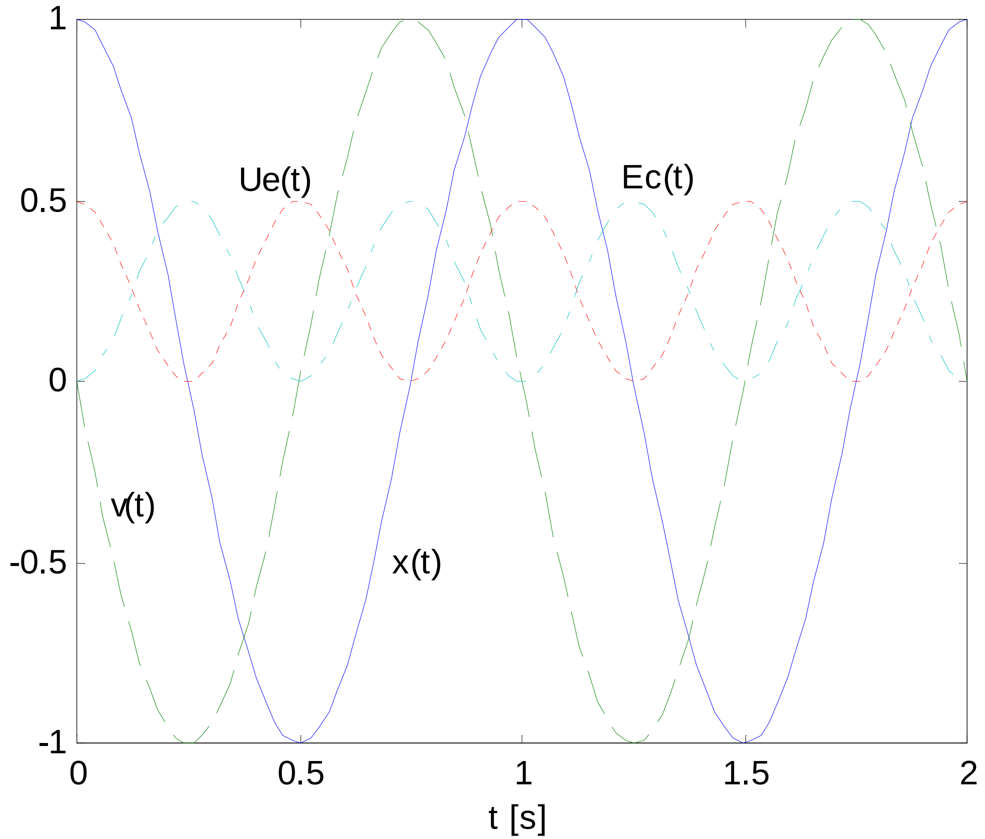
$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi)}$$

A aceleração

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)}$$

<u>Neste gráfico</u>

$$\boxed{A = 1; \quad T = 1; \quad k = 1; \quad \phi = 0}$$



Determinação da amplitude e fase do MHS

Os valores da amplitude de oscilação e da fase inicial **podem ser** determinados com base nas condições iniciais do movimento, i.e. na posição e na velocidade no instante t=0:

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \phi)}$$

A posição inicial

$$x(t=0) = x_0 = A\cos(\phi)$$

$$\boxed{v = -\omega A\sin(\omega t + \phi)}$$

A velocidade inicial

$$v(t=0) = v_0 = -\omega A\sin(\phi)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\phi = -\arctan\left(\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

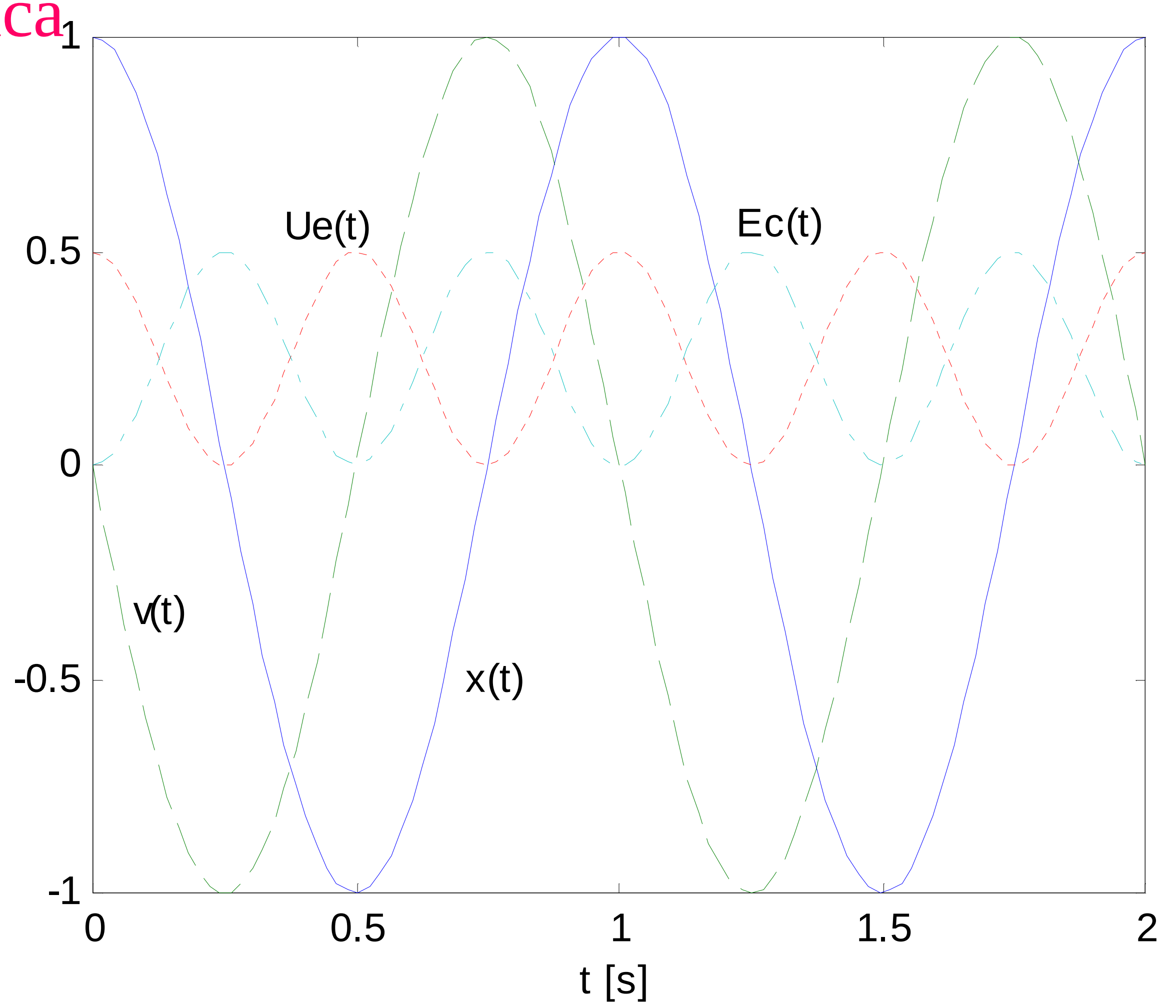
Caso Particular: se a velocidade inicial for **zero** então:

$\phi=0$ e $A=x_o$ $\boxed{\Rightarrow \quad x = x_o\cos(\omega t)}$

Energias cinética e potencial

A energia potencial elástica

$$\boxed{\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\phi) \end{aligned}}$$



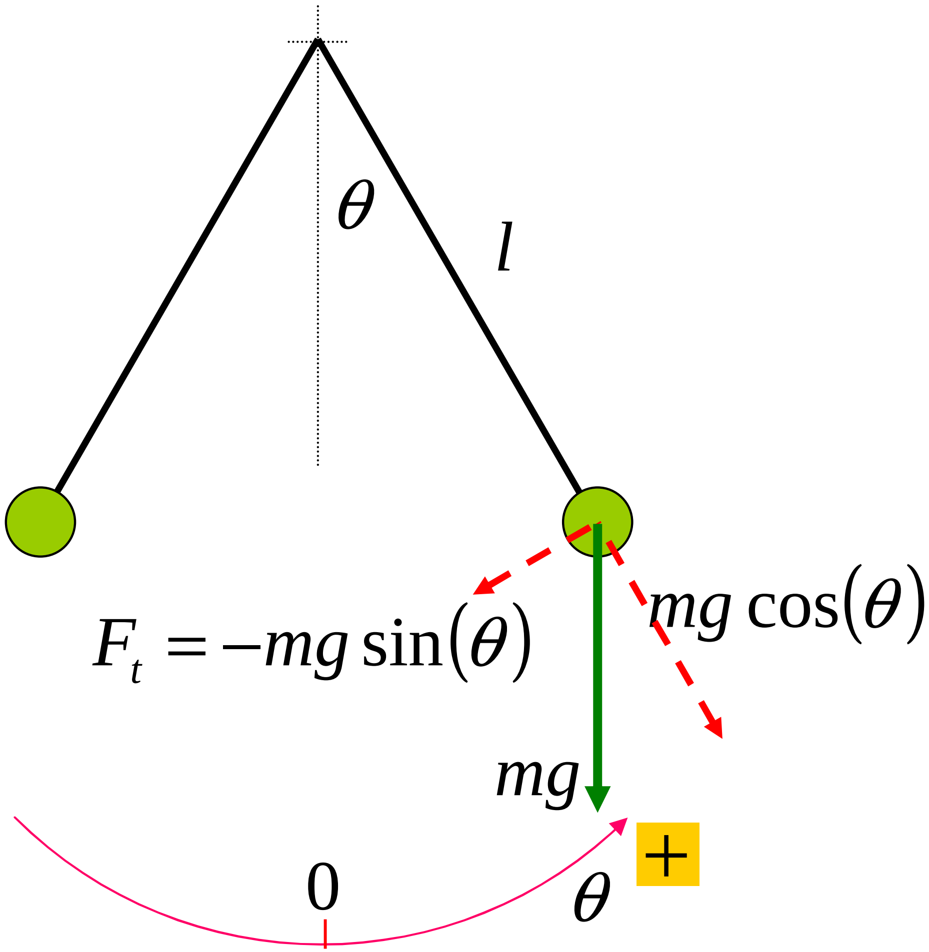
A energia cinética

$$\boxed{\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\phi) \end{aligned}}$$

A energia mecânica

$$\boxed{E_{mec} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2}$$

Tal como no caso da mola, o pêndulo é afastado da sua posição de equilíbrio e largado em seguida.



Aplicando a Segunda Lei de Newton na **<u>direcção tangencial</u>** ao movimento,

$$a_t = \frac{F_t}{m}$$

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mg\sin(\theta)}{m}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega l)}{dt} = l\frac{d\omega}{dt} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

Pêndulo Simples

Quando o ângulo de oscilação é pequeno, $\boxed{\sin(\theta) \approx \theta}$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

A solução desta equação é, por analogia com o movimento oscilatório massa-mola:

$$\boxed{\theta = A_\theta \cos(\omega t + \phi)} \quad \text{desde que,} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

O período de oscilação é pois, $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}$

Pêndulo Composto

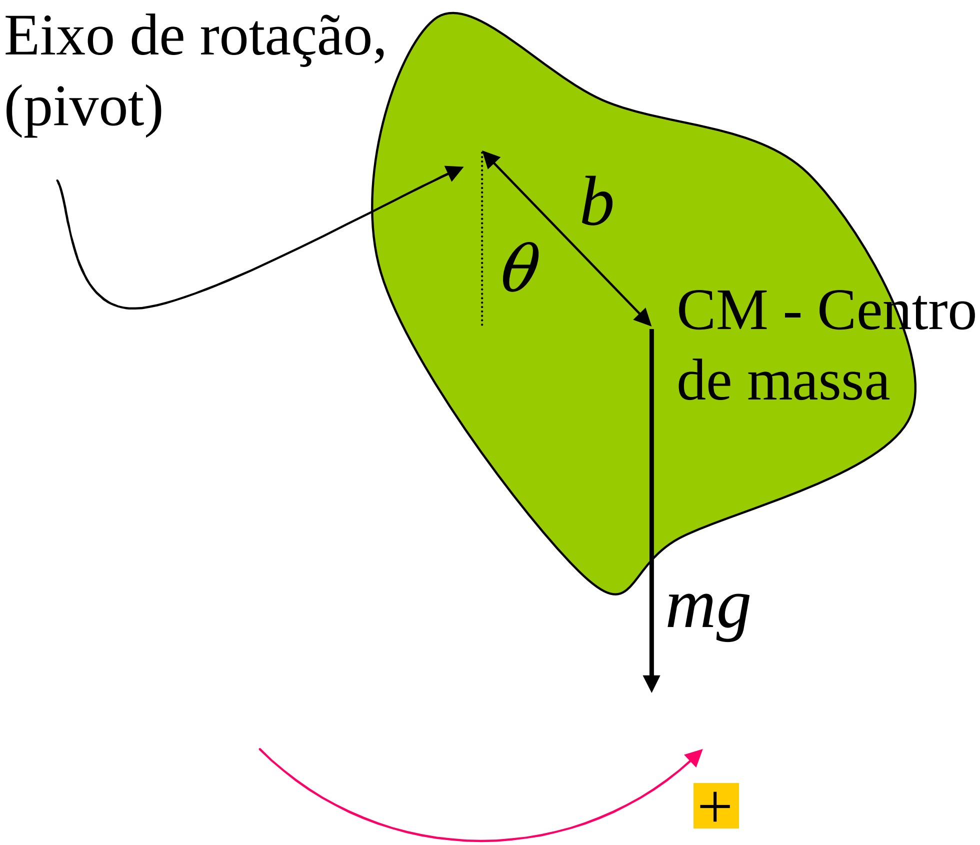
Tal como nos casos anteriores, o pêndulo composto é afastado da sua posição de equilíbrio e largado em seguida.

A 2ª Lei de Newton na forma angular,

$$\alpha = \frac{\tau}{I}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-mgb\sin(\theta)}{I}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgb}{I}\sin(\theta) = 0$$



b é a distância entre o eixo de rotação e o centro de massa do corpo

Pêndulo Composto

Quando o ângulo de oscilação é pequeno $\sin(\theta) \approx \theta$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgb}{I}\theta = 0}$$

A solução desta equação é por analogia com o movimento oscilatório do massa-mola

$$\boxed{\theta = A_\theta \cos(\omega t + \phi)}$$ desde que, $$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgb}{I}}}$$

O período de oscilação do pêndulo composto é: $$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}}}$$

O comprimento efectivo do pêndulo é, $$\boxed{l_{ef} = \frac{I}{mb}}$$

Movimento oscilatório amortecido

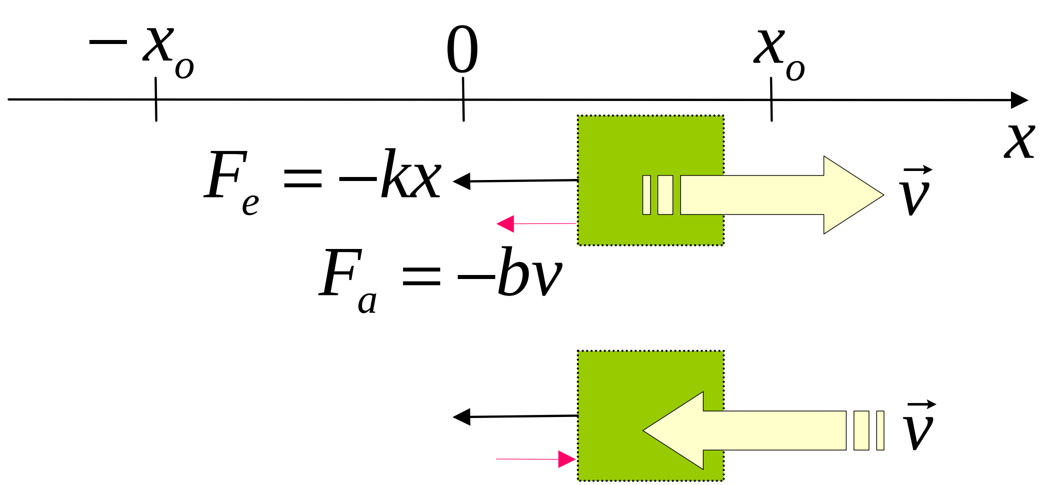
O atrito, nas suas variadas formas, faz com que o movimento oscilatório livre seja, regra geral, amortecido.

Este facto é tomado em conta adicionando-se uma força proporcional mas contrária á velocidade.

Da 2ª Lei de Newton,

$$a = \frac{\sum F}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{m} - \frac{bv}{m}$$



$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\left(\frac{b}{2m}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0}$$

b - é o coeficiente de amortecimento [N·s/m]

Equação do MHS amortecido

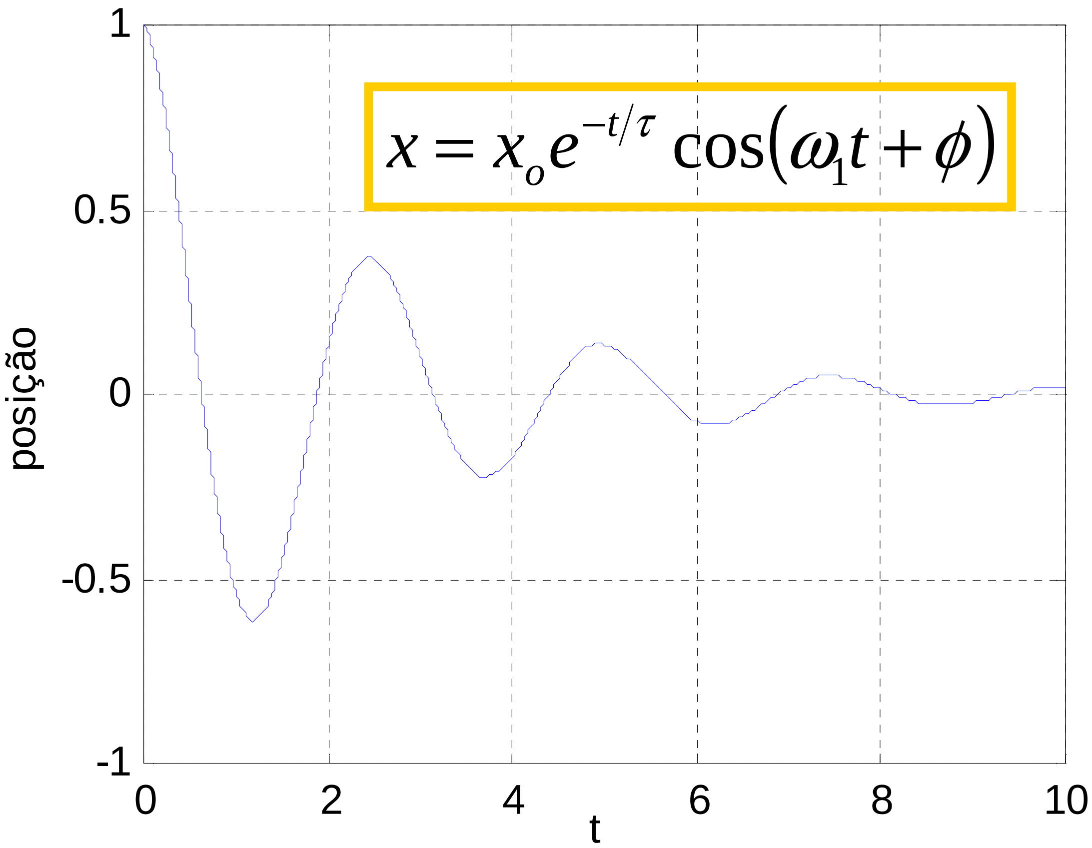
Solução da <u>equação diferencial</u>:

$$x = x_o e^{-bt/2m}\cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$A = 1\,m$$
$$k = 6.28\ N/m$$
$$m = 1\,kg$$
$$b = 0.8\ N \cdot s/m$$

1. A **amplitude decresce exponencialmente** no tempo. A constante de tempo é τ=2*m*/*b*.
2. O mesmos acontece com a energia que é dada por ½ kA^2
3. A frequência de oscilação diminui



Movimento Forçado. Ressonância.

No **movimento forçado** o sistema oscila á mesma frequência que a frequência do estímulo.

A amplitude do sistema é maior quando a frequência de excitação é igual á frequência natural.

O sistema diz-se então que entra em **ressonância**.

A ressonância é mais acentuada quando o amortecimento é pequeno.

O colapso da ponte de Tacoma

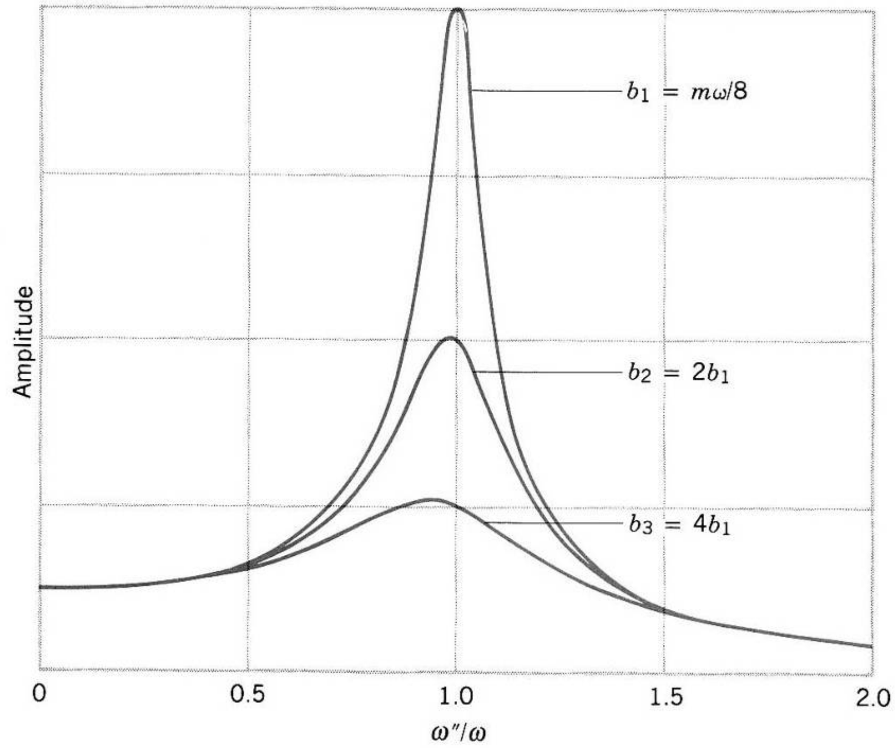


Figure 20 The amplitude F_m/G of a forced oscillator as the

A amplitude é **máx**. quando a frequência do estímulo é ω_o

$$\boxed{A = \frac{F_o/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_o^2\right)^2 + \left(\omega \dfrac{b}{m}\right)^2}}}$$

Movimento oscilatório. Problema

Um alto-falante produz som movendo um diafragma para a frente e para trás a uma determinada frequência. Se a amplitude de oscilação for 1,2x10^{-3} mm, a que frequências é que a aceleração do diafragma excede *g* (aceleração da gravidade)?

A aceleração do movimento oscilatório é,

$$a = \frac{dx^2}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

Cujo valor máximo é: $A\omega^2 > g$

$$A(4\pi f^2) > g$$

$$f > \sqrt{\frac{g}{4\pi A}}$$

Movimento oscilatório. Problema

Num certo porto as marés fazem com que a superfície do oceano suba e desça obedecendo a um movimento harmónico simples cujo período é 12,5 h. Quanto tempo demora para que o nível desça do seu nível máximo até metade desse mesmo nível?
R: 2.08 h

O movimento é descrito através da equação:

$$y = A\cos(\omega t);$$

No instante t=0 a amplitude é máxima

$$\frac{A}{2} = A\cos(\omega t);$$

Em que instante t, a amplitude é metade do valor máximo?

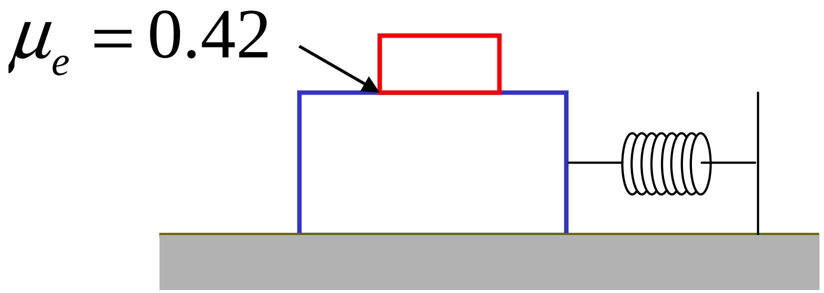
$$\omega t = \frac{\pi}{3}$$

$$t = \frac{\pi}{3\omega}$$

Mas, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

Substituindo, $t = \dfrac{T}{6}$

Dois blocos (m=1,22 kg e M=8,73kg) e uma mola (k=344 N/m) estão dispostos como se mostra na figura sobre uma superfície sem atrito. O coeficiente de atrito estático entre os blocos é 0,42. Qual a máxima amplitude de oscilação possível para que não haja deslizamento entre os blocos? R: 0.12 m



A aceleração máxima antes do bloco *m* escorregar é,

$$a_{\max} = \frac{f_{ae,\max}}{m} = \frac{\mu_e (mg)}{m} = \mu_e g$$

Ora a aceleração do movimento oscilatório é,

$$a = \frac{dx^2}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

cujo valor máximo é: $A\omega^2$

Assim,

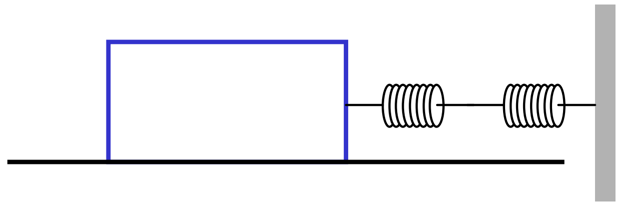
$$A\omega^2 < \mu_e g$$

$$A < \frac{\mu_e g}{\omega^2}$$

$$< \frac{\mu_e g (M+m)}{k} = 0.12m$$

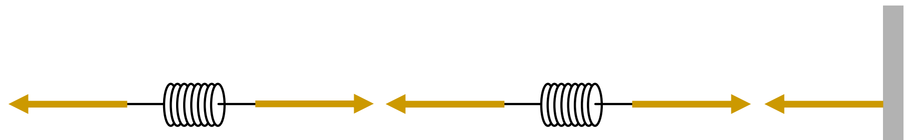
Duas molas estão ligadas como se mostra na figura a um bloco de massa m. A superfície onde assenta o bloco não oferece atrito. Se as constantes das molas forem k_1 e k_2 mostre que a frequência de oscilação do bloco é,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}} = \frac{f_1 f_2}{\sqrt{f_1^{\,2} + f_2^{\,2}}}$$



sendo f_1 e f_2 as frequências de oscilação das molas consideradas individualmente.

Quando a massa m aplica uma força F sobre a mola da esquerda temos a seguinte situação:



$$F = k_1 x_1 \qquad F = k_2 x_2$$

O deslocamento total da extremidade das molas é:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \Rightarrow F = \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right)x$$

Isto é, as duas molas comportam-se como se formassem uma única mola cuja constante é,

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

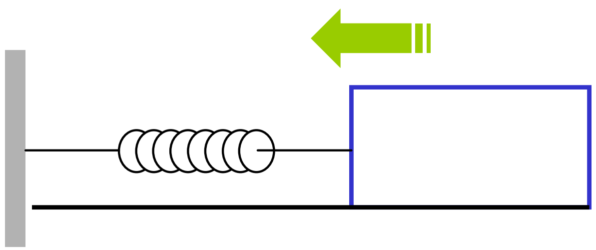
Movimento oscilatório. Problema

Um objecto de 5,13 kg move-se numa superfície horizontal sem atrito sob a acção de uma mola de constante 9.88 N/cm. O objecto é deslocado de 53,5 cm e é-lhe dada uma velocidade inicial de 11,2 m/s no sentido da sua posição de equilíbrio. Determine (a) a frequência do movimento, (b) a energia potencial inicial, (c) a energia cinética inicial e (d) a amplitude do movimento (e) a fase inicial. (R: 2.2 Hz; 141 J; 322 J; 96.7 cm; 56º)

$$a)\ f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 2.2\,Hz$$

$$b)\ U_{eo} = \frac{1}{2}kx_o^2$$

$$c)\ E_{co} = \frac{1}{2}mv_o^2$$



d) e e) $\begin{cases} x_o = A\cos(\phi) \\ v_o = -A\omega\sin(\phi) \end{cases}$

$$\begin{cases} 0.535 = A\cos(\phi) \\ -11.2 = -13.9A\sin(\phi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 0.96m \\ \phi = 56^{\circ} \end{cases}$$

Movimento oscilatório. Problema

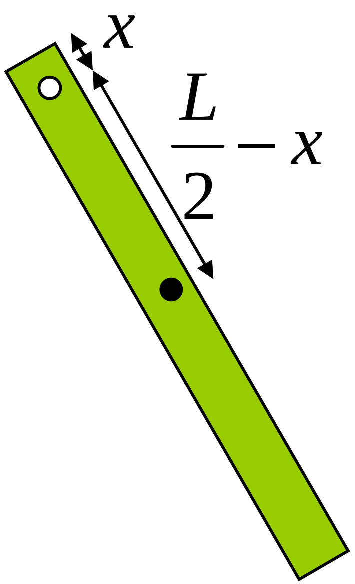
Um oscilador consiste de um bloco preso a uma mola de constante 456 N/m. Num instante t, a posição, a velocidade e a aceleração são 0.112 m, -13.6 m/s e -123 m/s^2 respectivamente. Calcule (a) a frequência, (b) a massa do bloco e (c) a amplitude de oscilação (d) a fase inicial. (R: 5.27Hz; 0.415 Kg; 0.425 m; 1.3 rad)

$$\begin{cases} x_o = A\cos(\phi) \\ v_o = -A\omega\sin(\phi) \\ a_o = -A\omega^2\cos(\phi) \end{cases} \begin{cases} A = 0.425m \\ \omega = 33.2\, rad/s \\ \phi = 1.3 rad \end{cases}$$

A frequência é, $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$

Movimento oscilatório. Problema

Uma régua de comprimento *L=50 cm* é feita oscilar tendo como pivot um ponto á distância x da marca de 50 cm. O período de oscilação é 2.5 s. Calcule a distância x



O período de oscilação é, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mg\left(\dfrac{L}{2}-x\right)}}$

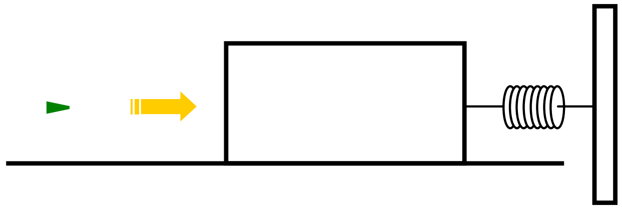
O momento de inércia de uma régua relativamente ao pivot é,

$$I = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}-x\right)^2$$

Resolvendo em ordem a x,

Movimento oscilatório. Problema

Um bloco de massa M está em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito e preso a uma parede através de uma mola de constante k. Uma bala de massa m e velocidade v atinge o bloco ficando embutida no mesmo. Determine a amplitude do movimento de oscilação resultante. Qual a fracção de energia cinética inicial conservada pelo movimento de oscilação.



A velocidade depois do impacto é,

$$v = \frac{mv_b}{M+m}$$

Esta é a velocidade máxima que se pode pois igualar a,

$$\frac{mv_b}{M+m} = A\omega$$

$$= A\sqrt{\frac{k}{M+m}} \Rightarrow A = \frac{mv_b}{\sqrt{k(M+m)}}$$

Movimento oscilatório. Problema

Há uma relação interessante entre o sistema massa-mola e o pêndulo gravítico simples. A frequência de oscilação de uma mola onde se suspende uma massa M que faz alongar a mola de h tem o mesmo período de oscilação de um pêndulo gravítico de comprimento *h*.

$$kh = mg$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{mg}{h}} = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

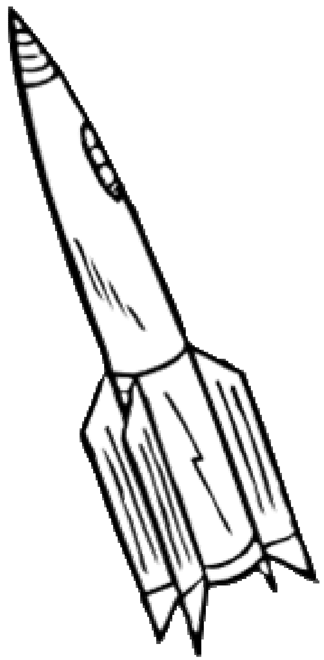
Aula 16 – Dinâmica de partículas

1. Centro de Massa e Momento Linear.

2. A 2.ª Lei de Newton para um Sistema de Partículas.

3. Momento Linear.

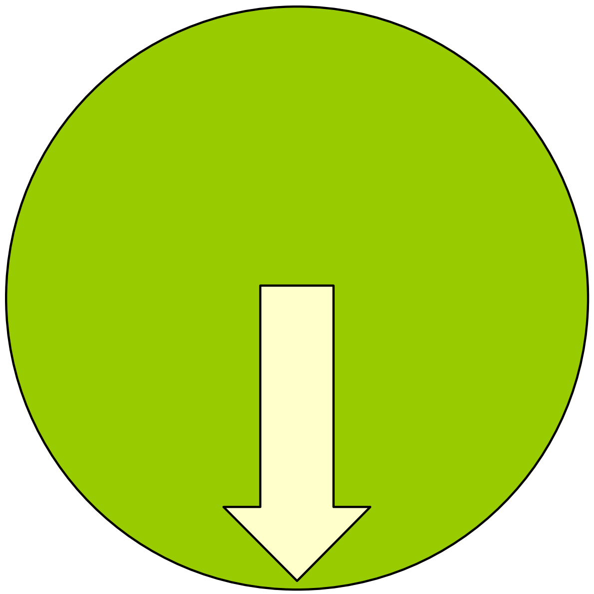
4. O Momento Linear de um Sistema de Partículas.



Sistema de partículas. Centro de Massa.

O que é o centro de gravidade de um corpo?

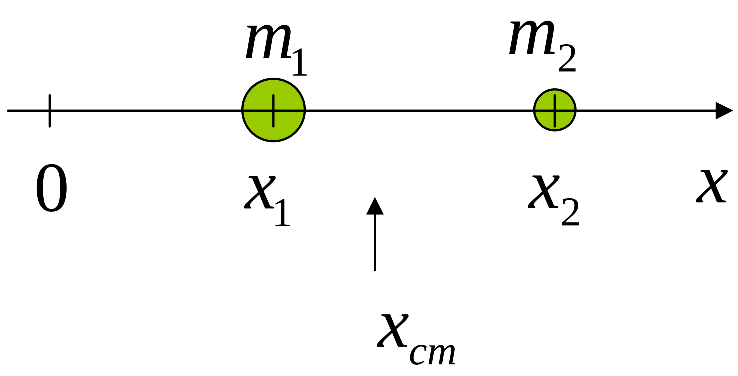
Considerando a força gravitacional, é o ponto do corpo, onde podemos considerar que está aplicada a totalidade da força da gravidade.



Deste modo podemos estudar o movimento do corpo estudando a acção da gravidade sobre o movimento desse ponto

Centro de massa

Onde está localizado o centro de massa do sistema de partículas constituído pelo corpo 1 de massa m_1 e pelo corpo 2 de massa m_2?



$$x_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_2$$

1. O centro de massa é uma média ponderada da posição das partículas do sistema.
2. O factor de ponderação é a razão entre a massa de cada uma das partículas e a massa total

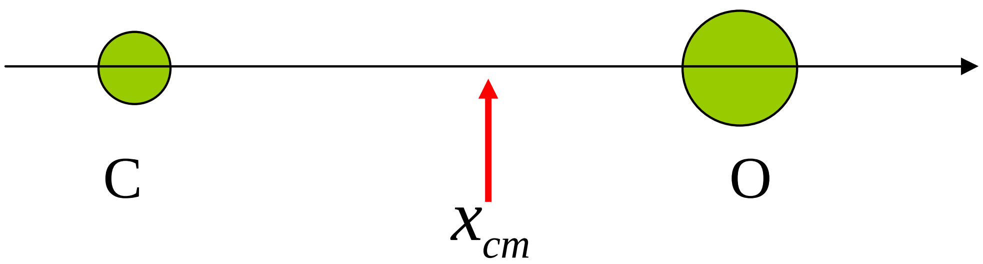
CM e Quantidade Mov. de um Sist. de Partículas

Os centros dos átomos de carbono e oxigénio numa molécula de monóxido de carbono (CO) estão afastados de uma distância de 1,131x10^{-10} m. Localize o centro de massa da molécula relativamente ao átomo de carbono. (R: a 0,646x10^{-10} m do átomo de carbono)

$$M_O x_O + M_C x_C = (M_O + M_C) x_{cm}$$

$$\text{se } x_C = 0 \Rightarrow x_O = 1.131\times 10^{-10} \quad \text{e}$$

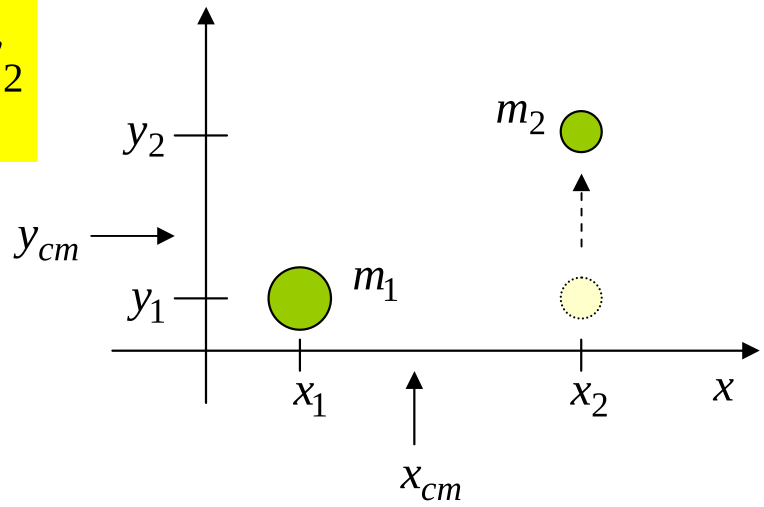
$$x_{cm} = \frac{M_O}{M_O + M_C} x_O$$



Centro de massa a duas dimensões

Vamos agora supor que as duas massas não estão á mesma altura.

$$y_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} y_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} y_2$$



$$x_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_2$$

<u>Não estando ao mesmo nível, a coordenada y do centro de massa, é calculada com base numa equação semelhante á do eixo x.</u>

Vector posição do Centro de Massa (CM)

Vamos agrupar as duas equações numa só:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_2$$

onde

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{u}_x + y_{cm}\hat{u}_y$$
$$\vec{r}_1 = x_1\hat{u}_x + y_1\hat{u}_y$$
$$\vec{r}_2 = x_2\hat{u}_x + y_2\hat{u}_y$$

Vector posição da partícula 2

Vector posição da partícula 1

Vector posição do CM

Cinemática do Centro de Massa (caso geral)

Massa Total $\quad M = m_1 + m_2$

Posição do centro de massa

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$$

Velocidade do centro de massa

$$\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \vec{v}_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Aceleração do centro de massa

$$\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \vec{a}_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{a}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{a}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad M\vec{a}_{cm} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2$$

Momento Linear Total

$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$
$$= \sum \vec{p}_i$$

Para o cálculo do momento linear total em lugar de somarmos os momentos individuais de cada partícula, podemos considerar que a massa total está concentrada no CM.

Qual o momento linear total de um sistema de partículas no referencial do seu Centro de Massa (CM)?

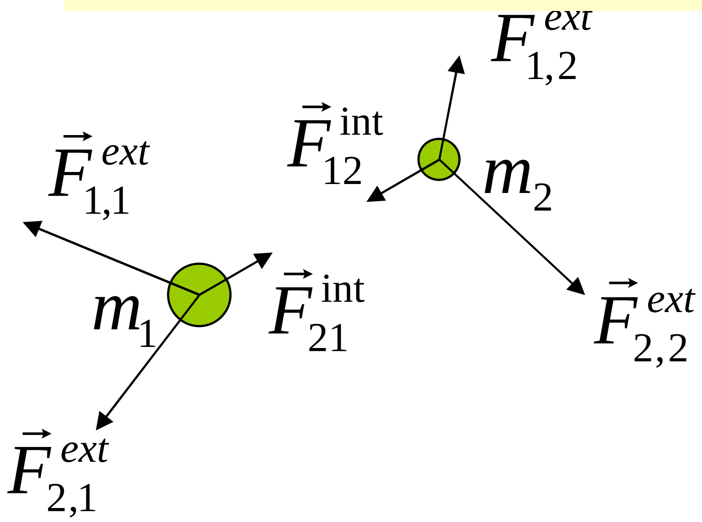
Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas

Sistema com **duas** partículas

A Segunda Lei de Newton **para cada partícula**,

$$\vec{F}_{1,1}^{\,ext} + \vec{F}_{2,1}^{\,ext} + \cdots + \vec{F}_{21}^{\,int} = m_1\vec{a}_1$$

$$\vec{F}_{1,2}^{\,ext} + \vec{F}_{2,2}^{\,ext} + \cdots + \vec{F}_{12}^{\,int} = m_2\vec{a}_2$$



Somando ordenadamente,

$$\left(\vec{F}_{1,1}^{\,ext} + \vec{F}_{2,1}^{\,ext} + \cdots + \vec{F}_{21}^{\,int}\right) + \left(\vec{F}_{1,2}^{\,ext} + \vec{F}_{2,2}^{\,ext} + \cdots + \vec{F}_{12}^{\,int}\right) = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2$$

$$\vec{F}_{1,1}^{\,ext} + \vec{F}_{2,1}^{\,ext} + \vec{F}_{1,2}^{\,ext} + \vec{F}_{2,2}^{\,ext} + \cdots = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 \quad \text{porquê?}$$

Usando a definição de aceleração do centro de massa,

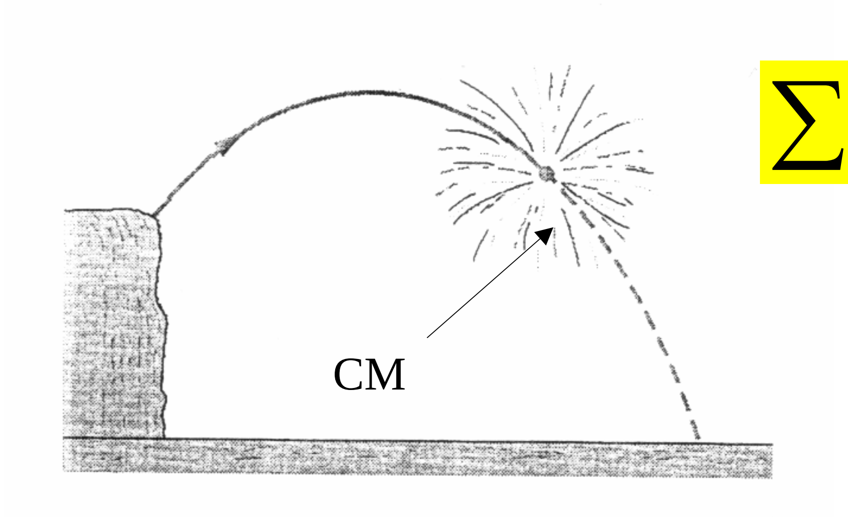
$$\vec{F}_{1,1}^{\,ext} + \vec{F}_{2,1}^{\,ext} + \vec{F}_{1,2}^{\,ext} + \vec{F}_{2,2}^{\,ext} = M\vec{a}_{cm}$$

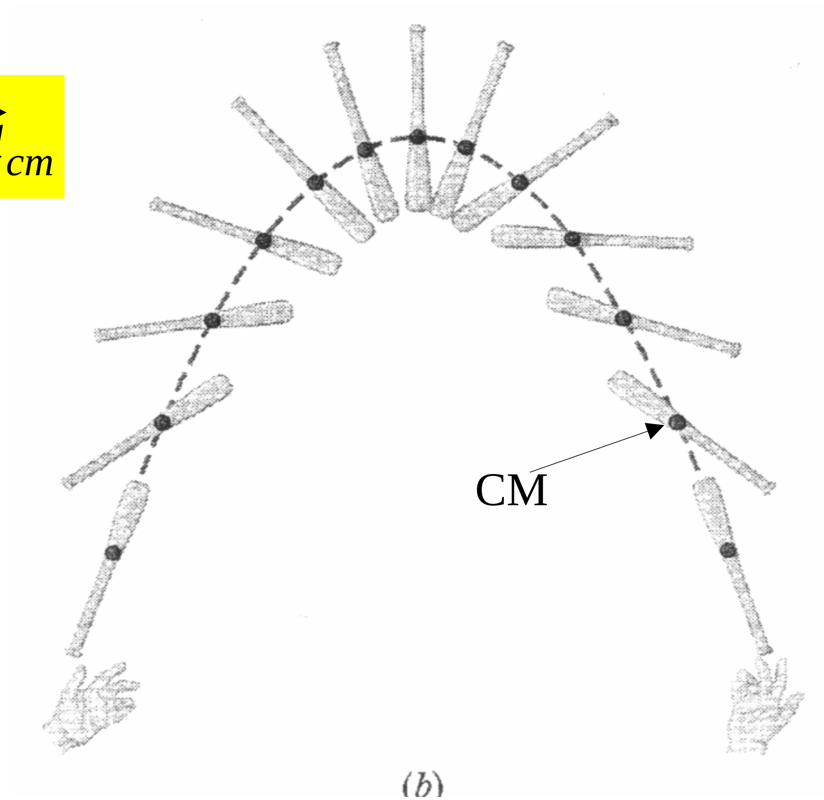
$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}}$$

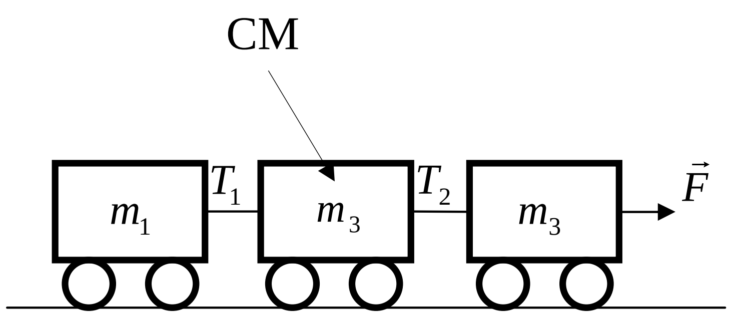
Movimento do Centro de Massa

A Segunda Lei de Newton, para um **Sistema de Partículas**, mostra que o seu Centro de Massa se move com se a massa total e as forças **externas ao sistema** estivessem todas concentradas nesse ponto.

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$$







A Segunda Lei de Newton para um Sistema de Partículas

A quantidade de movimento linear de um sistema de partículas é a soma das quantidades de movimento individuais,

$$\vec{P} = \sum \vec{p}$$

$$= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots = M\vec{v}_{cm}$$

Já vimos que a 2ª Lei de Newton para um sistema de partículas é,

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d\left(M\vec{v}_{cm}\right)}{dt}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Esta é a 2ª Lei de Newton, em termos da variação da quantidade de movimento de um sistema de partículas

Conservação da Quantidade de Movimento de um Sistema

Se a resultante das forças externas aplicadas ao sistema for nula

A quantidade de movimento do sistema conserva-se.

i.e.,

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = cte.}$$

Nota: Não esquecer que esta é uma equação vectorial e envolvendo três equações escalares em simultâneo.

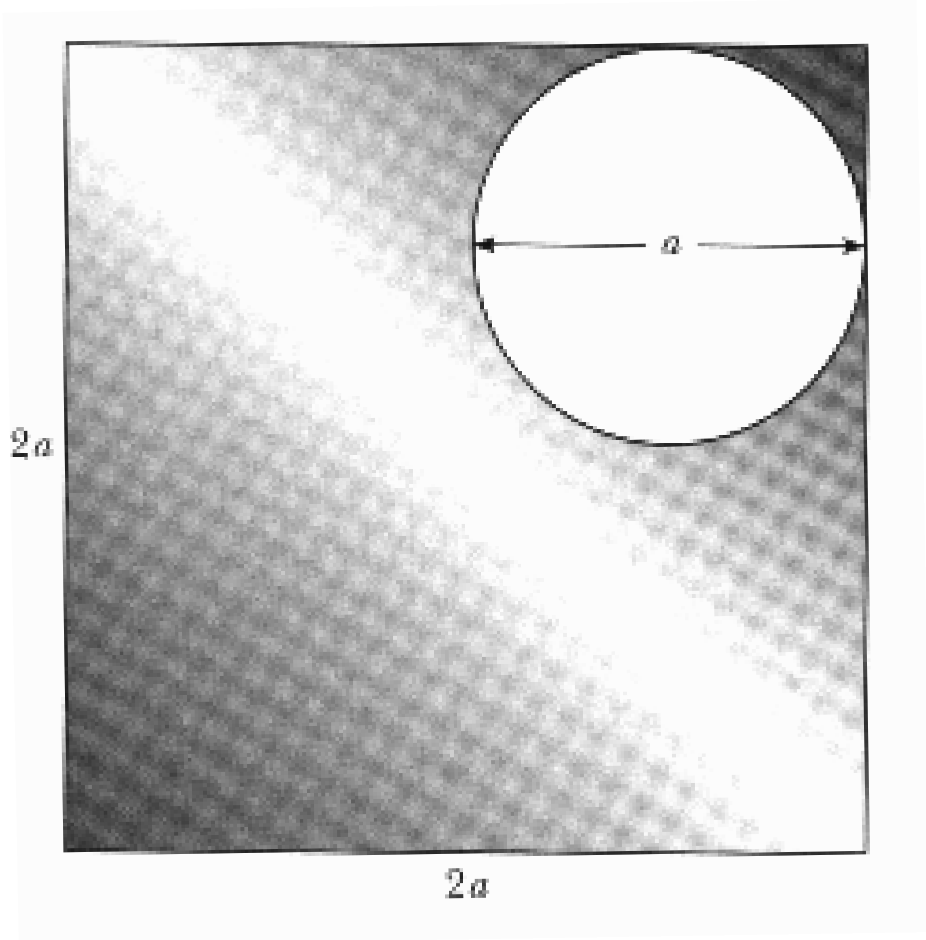
Exercício

Uma folha uniforme de metal, de forma quadrada com lado 2*a*, tem cortado um buraco circular de diâmetro *a*, como se mostra na figura. Onde se situa o centro de massa da folha? $-0.122a(e_x+e_y)$

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = M\vec{r}_{cm}$$

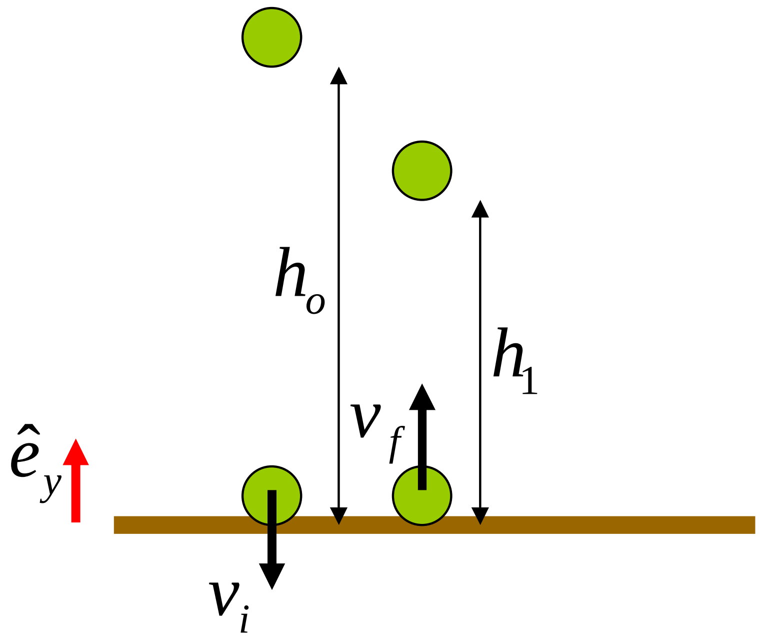
$$m_1\vec{r}_1 = M\vec{r}_{cm} - m_2\vec{r}_2$$

$$\vec{r}_1 = \frac{M}{m_1}\vec{r}_{cm} - \frac{m_2}{m_1}\vec{r}_2$$



Actividade

Uma bola com massa de 60 g é deixada cair de uma altura de 2.0m. Ela ressalta até uma altura de 1.8m. Qual a variação do seu momento linear durante a colisão com o chão?



A variação do momento e as velocidades antes e depois do impacto com o chão:

$$\Delta p = m\left(v_f - v_i\right)$$

$$\frac{mv_i^2}{2} = mgh_o; \quad \frac{mv_f^2}{2} = mgh_1$$

Substituindo,

$$\Delta p = m\left(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_o}\right)$$

<u>Atenção que a velocidade inicial é negativa</u>

Exercício

Um núcleo instável de massa 17×10^{-27} kg, inicialmente em repouso, desintegra-se em três partículas. Uma das partículas, de massa 5.0×10^{-27} kg, move-se ao longo do eixo dos *y* com velocidade de módulo 6.0×10^{3}m /s . Outra partícula de massa 8.4×10^{-27} kg, move-se ao longo do eixo dos *x* com uma velocidade de módulo 4.0×10^{3}m /s . Determine a velocidade da terceira partícula;

$$\vec{v}_1 = 6\times10^3\,\hat{e}_y$$

$$\vec{v}_2 = 4\times10^3\,\hat{e}_x$$

Pela conservação do momento linear,

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 = 0$$

$$\vec{v}_3 = -\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{M - (m_1 + m_2)} =$$

Exercicio 3

O Daniel, com massa 50 kg, está deslocar-se no seu “skate”, cuja massa é 5 kg, com velocidade constante de módulo 4 m/s. De repente, salta para trás, lançando o “skate” para a frente com velocidade constante de 8 m/s. Qual é a velocidade do Daniel quando os seus pés tocam o solo?

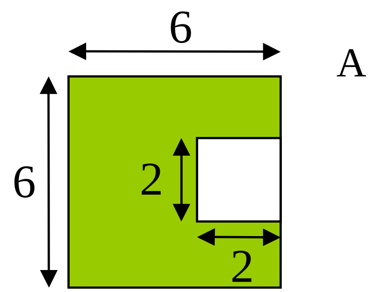
R: 3.6 m/s

Resolva o problema, utilizando o seguinte processo:

a) Faça um esboço da situação “antes” e “depois”;
b) Defina as grandezas relevantes para o problema, utilizando símbolos apropriados;
c) Identifique a incógnita pedida e obtenha-a resolvendo a equação pertinente.

CM e Momento linear de um Sistema de Partículas

A figura A mostra uma placa quadrada uniforme com 6 m de lado da qual foi recortado um pedaço de 2 m de lado. Localize o centro de massa da placa após o recorte. (R: -0.125e_x)



As dimensões estão em metros

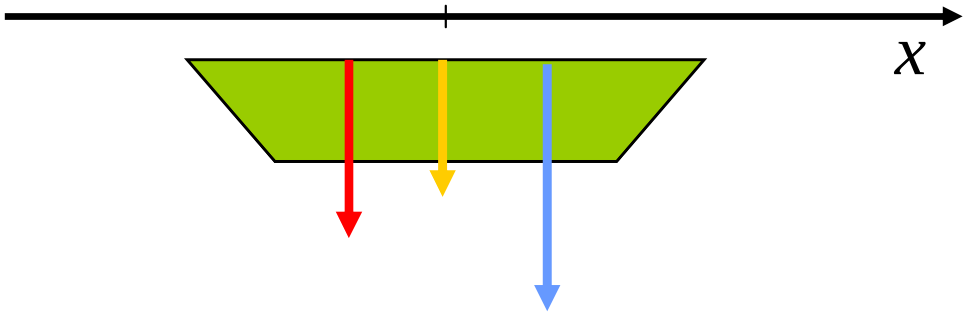
$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = M\vec{r}_{cm}$$

$$m_1\vec{r}_1 = M\vec{r}_{cm} - m_2\vec{r}_2$$

$$\vec{r}_1 = \frac{M}{m_1}\vec{r}_{cm} - \frac{m_2}{m_1}\vec{r}_2$$

$$= \frac{36}{36-4}0 - \frac{4}{36-4}2\hat{e}_x = -0.125\hat{e}_x$$

Ricardo, de massa igual a 80 kg, e Carmelita, que é mais leve, estão a passear no lago numa canoa de 30 kg. Quando a canoa está em repouso na água calma, eles trocam de lugar, que estão distantes 3,0 m e posicionados simetricamente em relação ao centro da canoa. Durante a troca, Ricardo percebe que a canoa se move de 40 cm em relação a um tronco de árvore submerso e calcula a massa da Carmelita. Qual o seu valor? (R: 57.6 kg)



No centro geométrico da canoa podemos calcular o CM do sistema antes e depois da troca de lugares,

$$x_{cm,i} = \frac{80\times1.5}{80+30+m_c} - \frac{m_c\times1.5}{80+30+m_c}$$

$$x_{cm,f} - x_{cm,i} = -0.4$$

$$x_{cm,f} = -\frac{80\times1.5}{80+30+m_c} + \frac{m_c\times1.5}{80+30+m_c}$$

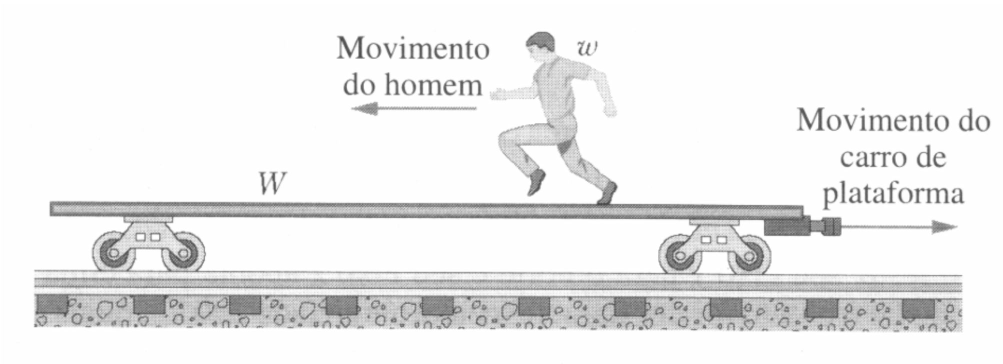
Um homem de 91 kg que está sobre uma superfície com atrito desprezável, empurra uma pedra de 68 g para longe dele, fornecendo uma velocidade de 4,0 m/s. Que velocidade adquire o homem em consequência deste empurrão? (-2.98e-3 m/s)

$$m_h\vec{v}_{hi} + m_p\vec{v}_{pi} = m_h\vec{v}_{hf} + m_p\vec{v}_{pf}$$

$$0 = m_1\vec{v}_{hf} + m_2\vec{v}_{pf}$$

$$\vec{v}_{hf} = -\frac{m_p}{m_h}\vec{v}_{pf} = -2.98\times10^{-3}\,\hat{e}_x \quad m/s$$

Um vagão-plataforma de peso *W* pode deslocar-se sem atrito ao longo de uma linha férrea horizontal recta (figura B). Inicialmente um homem de peso *w* está em parado e o vagão desloca-se para a direita com velocidade v_o. Qual será a velocidade do vagão se o homem começar a correr para a esquerda com uma velocidade, relativa ao vagão, v_{rel}?

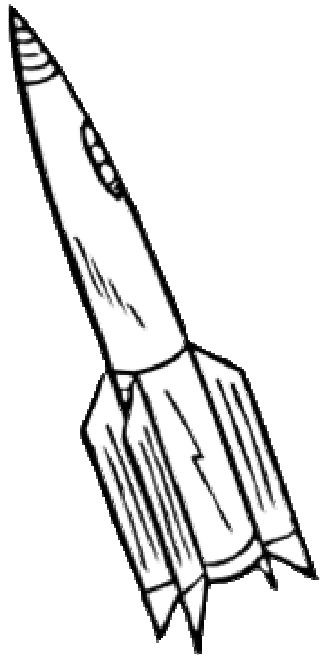


Uma embarcação em repouso explode, dividindo-se em três pedaços. Dois pedaços da mesma massa, saem voando em direcções perpendiculares entre si com a mesma velocidade de 30 m/s. O terceiro pedaço possui o triplo da massa dos outros pedaços. Qual a sua velocidade (módulo e direcção) após a explosão?

$$0 = m\vec{v}_{Af} + m\vec{v}_{Bf} + 3m\vec{v}_{Cf}$$

$$\vec{v}_{Cf} = -\frac{m\vec{v}_{Af} + m\vec{v}_{Bf}}{3m} = -10\hat{e}_x - 10\hat{e}_y \quad m/s$$

Aula 17 – Colisões e Impulso



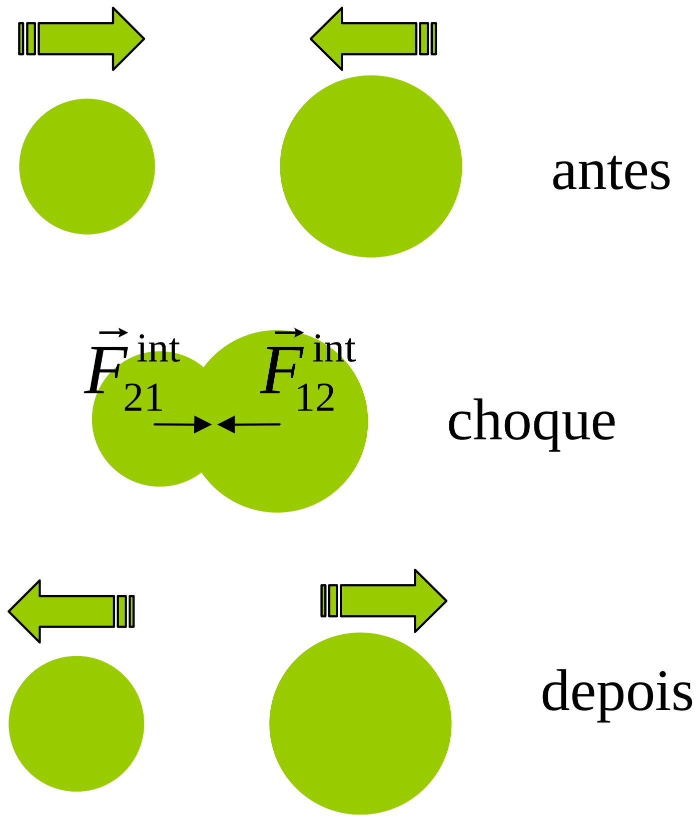
Colisões

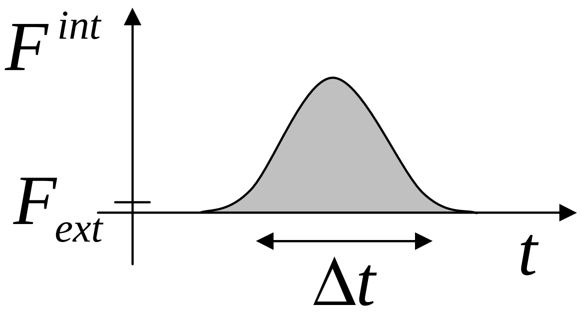
O que é uma colisão?

É um acontecimento que ocorre num intervalo de tempo curto e durante o qual os corpos envolvidos exercem **forças internas elevadas** entre si.

1. As forças internas de interacção durante a colisão entre as partículas é geralmente muito maior do que as forças externas aplicadas.

2. O tempo de colisão é muito menor do que o tempo de actuação de uma força externa.





Conservação da Quantidade de Movimento do Sistema

Durante a colisão podemos considerar que a resultante das forças externas é desprezável,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} \approx 0$$

E a velocidade do CM (centro de massa) permanece constante.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

$$M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = 0$$

$$\vec{v}_{cm} = cte$$

Numa colisão o MOMENTO LINEAR do sistema <u>conserva-se</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\vec{P} &= 0 \\ \Delta\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) &= 0 \\ \Delta\vec{p}_1 &= -\Delta\vec{p}_2 \end{aligned}}$$

As variações de momento linear são simétricas.

A 2ª Lei de Newton aplicada a cada uma das partículas

Vamos então supor que as **forças externas ao sistema são desprezáveis** durante a colisão.

A Segunda Lei de Newton para as partículas 1 e 2 em separado escrevem-se,

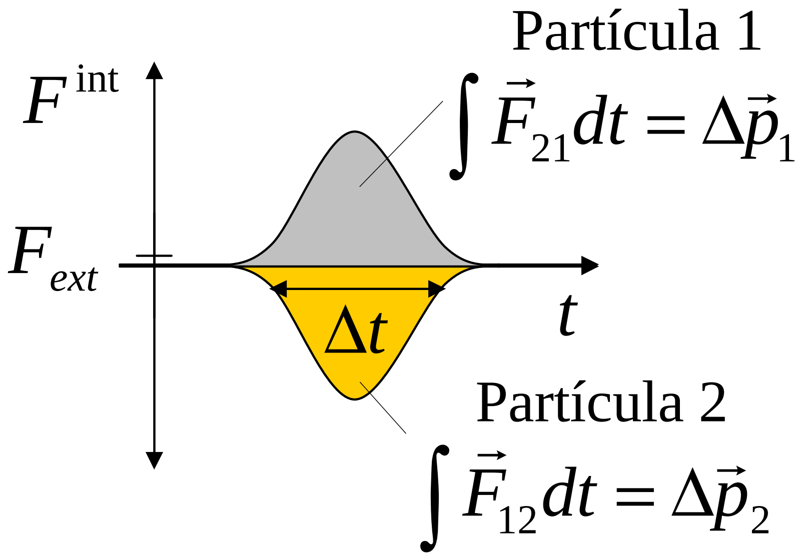
Corpo 1

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F}_{21} &= \frac{d\vec{p}_1}{dt} \\ \vec{F}_{21}dt &= d\vec{p}_1 \\ \int \vec{F}_{21}dt &= \Delta\vec{p}_1 \end{aligned}}$$

Corpo 2

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \frac{d\vec{p}_2}{dt} \\ \vec{F}_{12}dt &= d\vec{p}_2 \\ \int \vec{F}_{12}dt &= \Delta\vec{p}_2 \end{aligned}}$$

Impulsos das forças de interacção



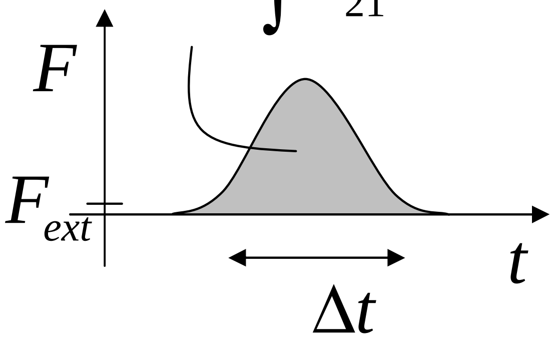
Impulso de uma força:

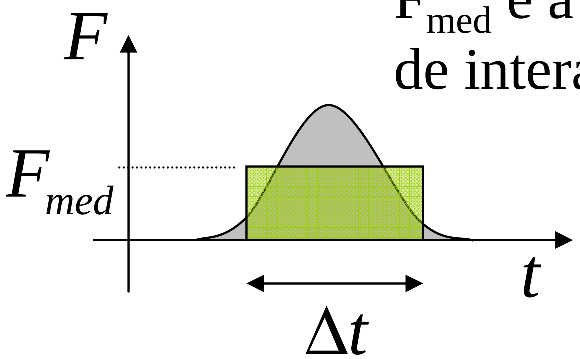
$$I = \int \vec{F}dt$$

Quais os limites de integração?

Impulso aplicado á partícula 1 pela força F_{21}

$$\vec{I} = \int \vec{F}_{21} dt = F_{med} \Delta t$$





F_{med} é a força média de interacção.

Os impulsos aplicados pelas forças externas é desprezável face ao impulso da força de interacção,

O impulso aplicado na partícula 2 é igual e oposto ao aplicado na partícula 1.

Quanto **menor** o tempo de choque maior a força média se o impulso se mantiver constante.

Colisões

Numa partida de bilhar americano, um taco acerta numa bola em repouso e exerce uma força média de 50N durante 10 ms. Se a bola tiver uma massa de 0,20 kg, que velocidade terá ela imediatamente após o impacto.

$$\Delta\vec{p} = \int \vec{F}_{med} dt$$

Como temos apenas uma dimensão

$$m\Delta v = F_{med} \Delta t$$

$$\Delta v = \frac{F_{med}}{m} \Delta t = \frac{50 \times 10 \times 10^{-3}}{0.2}$$

Colisões

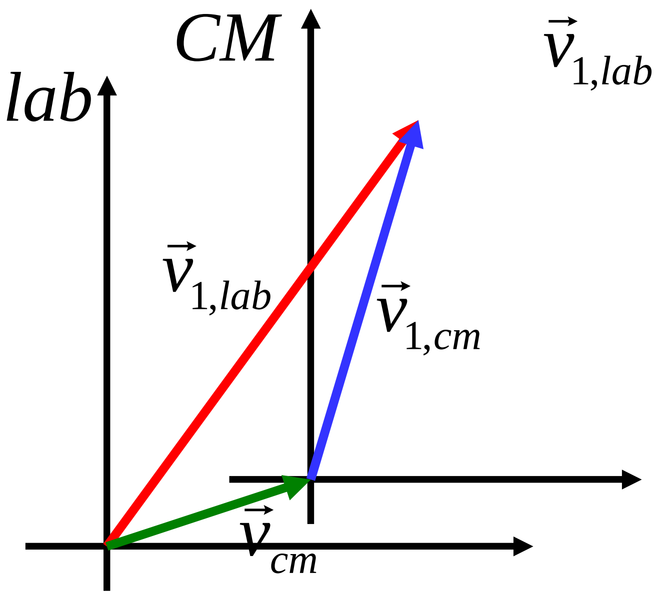
Uma bola de 1,2 kg cai na vertical sobre o chão, acertando-o com uma velocidade de 25 m/s. Ela ressalta com uma velocidade de 10 m/s. (a) Que impulsão actua sobre a bola durante o contacto? (b) Se a bola estiver em contacto durante 0,020 s qual a força média durante a interacção?

A Energia Cinética de um Sistema de Partículas

A energia cinética total no referencial do laboratório,

$$E_c^{lab} = E_{c,cm}^{lab} + \left(E_{c,1}^{cm} + E_{c,2}^{cm}\right)$$

1ª parcela – energia cinética do centro de massa no referencial do laboratório
2ª parcela – soma das energias cinéticas das partículas relativas ao CM
Tente demonstrar, lembrando que no referencial do CM a quantidade de movimento do sistema é nula.



$$\vec{v}_{1,lab} = \vec{v}_{1,cm} + \vec{v}_{cm}$$

Variação da energia cinética durante a colisão

Entre dois instantes, imediatamente antes e imediatamente após a colisão, podemos escrever que:

$$\Delta E_c^{lab} = \Delta E_{c,cm}^{lab} + \Delta\left(E_{c,1}^{cm} + E_{c,2}^{cm}\right)$$
$$= \Delta E_{c,cm}^{lab} + \left(\Delta E_{c,1}^{cm} + \Delta E_{c,2}^{cm}\right)$$

A **primeira parcela é nula**. Porquê?

Porque a resultante das forças externas é aproximadamente nula.

E a segunda parcela?

Depende do tipo de colisão.

A energia cinética relativa ao CM. Tipos de colisão.

Elástica: A energia cinética das partículas relativa ao CM conserva-se.

$$\Delta E_{c,1}^{cm} = -\Delta E_{c,2}^{cm} \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{c}^{lab} = \Delta E_{c,cm}^{lab} + \Delta\left(E_{c,1}^{cm} + E_{c,2}^{cm}\right) = 0$$

Inelástica:

A energia cinética das partículas em relação ao centro de massa não se conserva.

Regra geral diminui, embora possa aumentar em certos casos como por exemplo numa explosão.

Numa colisão inelástica a energia interna do sistema varia de forma a manter a energia total (cinética + potencial) constante.

$$\Delta\left(E_{c,1}^{cm} + E_{c,2}^{cm}\right) \neq 0$$

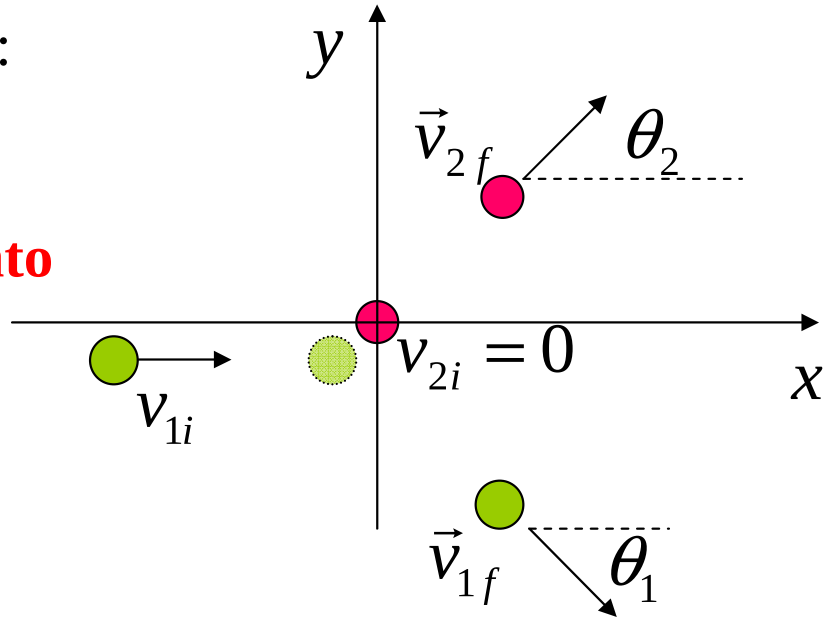
Totalmente inelástica:

É um caso particular da colisão inelástica. A velocidade final das duas partículas é igual (i.e. seguem juntas) e portanto as suas velocidades relativamente ao CM são nulas. Vemos, neste caso, que a variação da soma das energias cinéticas das partículas é máxima.

$$\vec{v}_{1f,cm} = \vec{v}_{2f,cm} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E_{c,1f}^{cm} = E_{c,2f}^{cm} = 0$$

Colisão a duas dimensões

A duas dimensões se o choque for **elástico** há:



a) Conservação da quantidade de movimento

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos(\theta_1) + m_2 v_{2f} \cos(\theta_2) \\ 0 = -m_1 v_{1f} \sin(\theta_1) + m_2 v_{2f} \sin(\theta_2) \end{cases}$$

b) Conservação da energia cinética

No referencial do laboratório e assumindo que o corpo 2 está em repouso no inicio:

$$E_{c,1i} + E_{c,2i} = E_{c,1f} + E_{c,2f}$$

$$\frac{m_1 v_{1i}^2}{2} = \frac{m_1 v_{1f}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2f}^2}{2}$$

Colisão elástica: ângulo entre as velocidades finais

QUESTÃO: Mostre que se a colisão for elástica, se as massas forem iguais e a velocidade inicial da massa 2 for nula, então as velocidades finais serão perpendiculares entre si.

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} \quad \text{Conser. Momento Linear}$$

$$\frac{m_1 v_{1i}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2i}^2}{2} = \frac{m_1 v_{1f}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2f}^2}{2} \quad \text{Conserv. Energia Cinética}$$

Elevando ao quadrado a equação do momento linear e Simplificando,

$$\left(m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}\right)^2 = \left(m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}\right)^2$$

$$m_1^2 v_{1i}^2 + m_2^2 v_{2i}^2 + 2m_1 m_2\left(\vec{v}_{1i}\cdot\vec{v}_{2i}\right) = m_1^2 v_{1f}^2 + m_2^2 v_{2f}^2 + 2m_1 m_2\left(\vec{v}_{1f}\cdot\vec{v}_{2f}\right)$$

$$0 = \vec{v}_{1f}\cdot\vec{v}_{2f}$$

O que quer dizer que **as velocidades finais são perpendiculares entre si**.

Caso particular: colisão frontal e elástica

Se o choque for frontal o problema tem uma só dimensão.

Vamos **adoptar** o **referencial do centro de massa**. Assim,

1) Conservação da quantidade de movimento e a

$$m_1 v_{1i,cm} + m_2 v_{2i,cm} = m_1 v_{1f,cm} + m_2 v_{2f,cm} = 0$$

2) Conservação da energia cinética das partículas relativa ao CM,

$$m_1 v_{1i,cm}^2 + m_2 v_{2i,cm}^2 = m_1 v_{1f,cm}^2 + m_2 v_{2f,cm}^2$$

Temos duas equações e duas incógnitas, portanto podemos determinar as velocidades finais a partir das velocidades iniciais e das massas.

Velocidades finais no CM

Resolvendo em ordem ás velocidades da partícula 2,

$$m_1 v_{1i,cm} + m_2 v_{2i,cm} = 0 \quad \wedge \quad m_1 v_{1f,cm} + m_2 v_{2f,cm} = 0$$

$$v_{2i,cm} = -\frac{m_1}{m_2} v_{1i,cm} \quad \wedge \quad v_{2f,cm} = -\frac{m_1}{m_2} v_{1f,cm}$$

Substituindo na equação da energia cinética,

$$\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) m_1 v_{1i,cm}^2 = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) m_1 v_{1f,cm}^2$$

$$v_{1f,cm} = \pm v_{1i,cm}$$

e portanto substituindo,

$$v_{2f,cm} = \pm v_{2i,cm}$$

O sinal que interessa é o negativo pois o positivo corresponde á situação inicial.

Velocidades finais

As velocidades finais das partículas **relativamente ao Centro de Massa** em função das suas velocidades iniciais são:

$$v_{1f,cm} = -v_{1i,cm}$$

$$v_{2f,cm} = -v_{2i,cm}$$

(i.e. as partículas passam a deslocar-se, relativamente ao centro de massa, no sentido contrário ao inicial)

Choque frontal e elástico no referencial do laboratório

Se quisermos relacionar as velocidades finais com as iniciais, no referencial do laboratório, devemos transformar o resultado obtido no referencial do CM para o referencial do laboratório. i.e.,

$$v_{1i,lab} = v_{1i,cm} + v_{cm}$$

$$v_{2i,lab} = v_{2i,cm} + v_{cm}$$

$$v_{1f,lab} = v_{1f,cm} + v_{cm}$$

$$v_{2f,lab} = v_{2f,cm} + v_{cm}$$

<u>Não esquecer que</u>:

$$v_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i,lab} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{2i,lab}$$

Fazendo as substituições,

$$v_{1f,lab} = -v_{1i,lab} + 2v_{cm}$$

$$v_{2f,lab} = -v_{2i,lab} + 2v_{cm}$$

Velocidades finais no laboratório para o choque elástico

As velocidades finais em função das velocidades iniciais, no referencial do LABORATÓRIO são após a substituição de valores dadas por,

$$\boxed{\begin{aligned} v_{1f} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \\ v_{2f} &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} \end{aligned}}$$

Colisão frontal totalmente inelástica

Numa colisão frontal, totalmente inelástica as velocidades finais das partículas relativas ao CM, são nulas:

$$v_{1f,cm} = 0$$

$$v_{2f,cm} = 0$$

A velocidade final do conjunto no referencial do laboratório será a velocidade do CM, i.e.

$$v_{1f} = v_{2f} = v_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$ ***Ver aula anterior***

Qual a variação da energia cinética do sistema?

$$\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci}$$

$$\Delta E_c = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \right)^2 - \left(\frac{m_1 v_{1i}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2i}^2}{2} \right)$$

Exercicio 15-1

Num parque de diversões, as pessoas são convidadas a tentar derrubar um poste de madeira, atingindo-o com uma bola. Pode ser escolhida uma bola de borracha, que ressalta muito facilmente ou uma bola de plasticina, de massa igual, que fica colada ao alvo. Suponha que pode atirar as bolas com velocidade inicial igual (e pontaria igual). Só pode ter uma tentativa.

a) Qual das bolas escolheria? Porquê?

Exercício

b) Considere a situação com maior cuidado. Ambas as bolas possuem a mesma componente horizontal do momento linear, p_{ix}, imediatamente antes de atingir o poste. A bola de plasticina fica colada, a bola de borracha ressalta com velocidade de módulo aproximadamente igual ao que tinha antes do choque. Qual é a componente do momento linear imediatamente após o choque de cada bola?

Bola de plasticina: p_{fx} = _______________; Bola de borracha: p_{fx}=_______________.

Atenção: *Teve em conta o sinal da componente do momento linear?*

c) Qual é a variação do momento linear de cada bola?
Bola de plasticina: Δp_x= _______________; Bola de borracha: Δp_x =_______________.
d) Qual das bolas sofre impulso de maior módulo durante a colisão? Justifique.

Exercício

e) Partindo da 3.ª Lei de Newton, o impulso que a bola exerce no poste é igual em módulo, mas de sentido oposto, ao impulso que o poste exerce na bola. Qual é a bola que exerce no poste impulso de maior módulo?

f) Concorda ainda com a sua resposta à alínea a)? Se não, como é que a altera? Justifique.

Exercício

Uma bola pequena e leve, L, e uma bola grande e pesada, G, aproximam-se uma da outra, colidem e separam-se.

a) Compare a força que L exerce em G com a força que G exerce em L, ou seja, F_{LG} é maior, menor ou igual a F_{GL}? Justifique.

b) Compare o intervalo de tempo durante o qual L sofre uma força com o intervalo de tempo durante o qual G sofre uma força. São iguais ou um é maior do que o outro?

c) Desenhe um gráfico plausível, mostrando a força F_{LG} em função do tempo e outro gráfico plausível, mostrando a força F_{GL} em função do tempo. Não se esqueça do sinal de cada força.

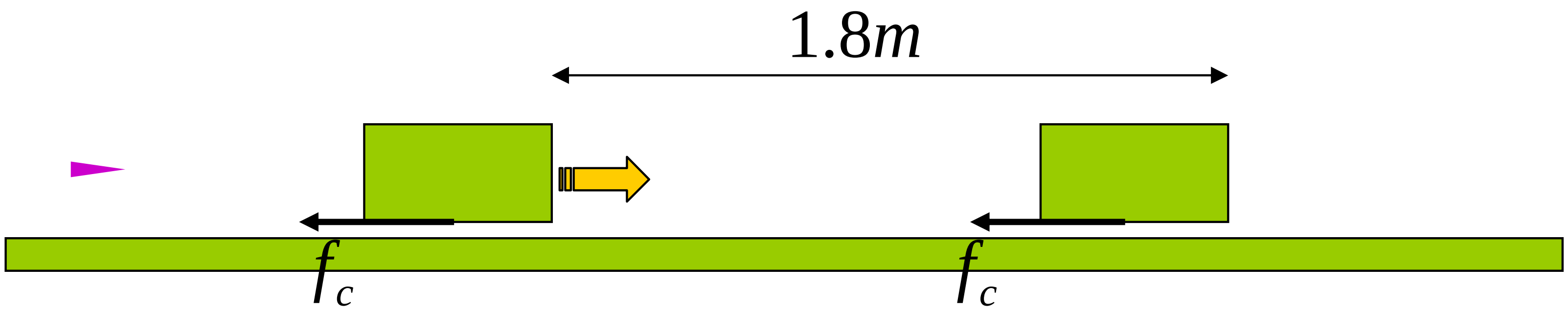
d) Compare o impulso fornecido a L com o impulso fornecido a G.

e) Compare a variação do momento linear de L com a variação do momento linear de G.

f) Compare a variação da velocidade de L com a variação da velocidade de G.

g) Qual é a variação da soma dos momentos lineares das duas bolas? É positiva, negativa ou nula?

Uma bala de massa igual a 4,5 g é disparada horizontalmente para dentro de um bloco de madeira de 2,4 kg em repouso sobre uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é de 0,20. A bala pára no bloco, que desliza para a frente de 1,8 m (sem rotação) (a) Qual a velocidade do bloco imediatamente após a bala parar em relação a ele? (b) Com que velocidade a bala foi disparada?



Pela conservação de energia,

$$\Delta E_{mec} = W_{na}$$

$$\Delta E_c = -f_c s$$

$$m\left(\frac{0}{2} - \frac{v_i^2}{2}\right) = -\mu_c (mg) s \Rightarrow v_i = \sqrt{2\mu_c g s} = 2.66 m/s$$

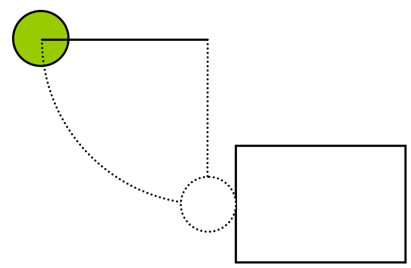
O choque é totalmente inelástico por isso há apenas a conservação do momento linear,

$$v_{cm} = \frac{m_b}{m_c + m_b} v_{bi} = \sqrt{2\mu_c g s}$$

$$\Rightarrow v_{bi} = \frac{m_c + m_b}{m_b} \sqrt{2\mu_c g s}$$

Colisões

Uma bola de aço de massa igual a 0,50 kg é presa a um fio de 70,0 cm de comprimento que está fixo na outra extremidade.
A bola é então solta quando o fio está na horizontal. Na parte mais baixa a bola colide com um bloco de aço de 2,5 kg inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito. A colisão é elástica. Ache o módulo da velocidade escalar da bola e do bloco imediatamente depois da colisão. (



Pela conservação da energia mecânica obtemos,

$$v_{bi} = \sqrt{2gh}$$

Pela conservação do momento e da energia cinètica antes e depois do choque obtemos,

$$v_{bf} = \frac{m_b - m_c}{m_b + m_c} v_{bi}$$

$$v_{cf} = \frac{2m_b}{m_b + m_c} v_{bi}$$

Colisões

Após uma colisão **totalmente inelástica**, observa-se que dois objectos da mesma massa e velocidade escalar se afastam juntos do ponto onde chocaram com metade da velocidade escalar inicial que cada um possuía. Ache o ângulo entre as velocidades iniciais dos objectos.

Colisões

O pára-choques de um carro de 1220 kg é projectado para absorver toda a energia quando o carro colide frontalmente com uma parede com uma velocidade de 5.2 km/h. Este carro colide á velocidade de 75 km/h com outro carro de 934 kg viajando na mesma direcção a 62 km/h. Sabendo que o carro de 934 kg adquiriu a velocidade de 71.3 km/h como resultado da colisão determine (a) a velocidade do carro de 1220 kg após a colisão? (b) Qual a razão entre a energia cinética absorvida na colisão e a energia absorvida pelo pára-choques do carro de 1220 kg.

Aula 19 - Rotação

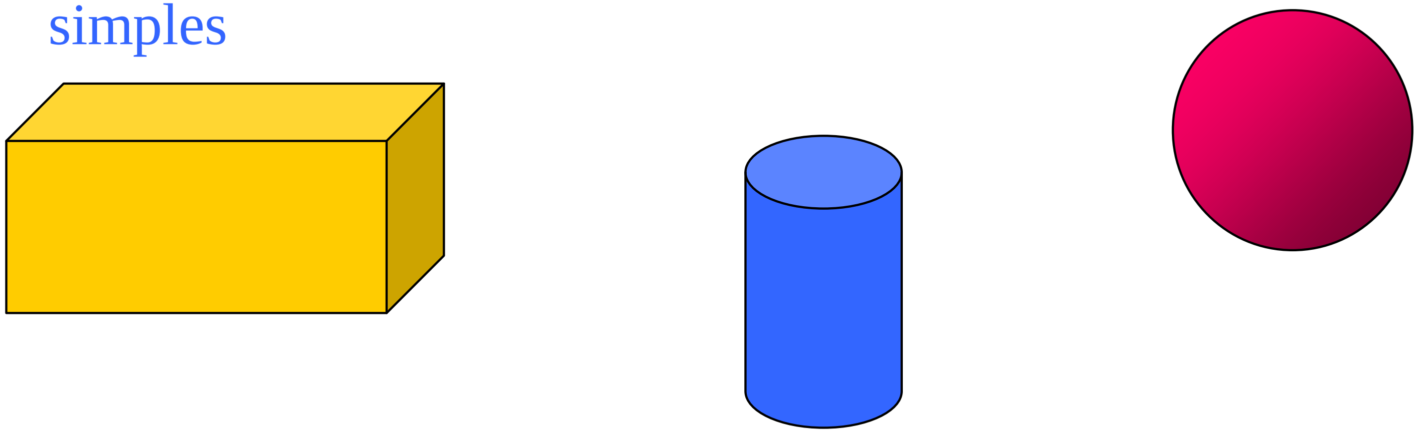
1. Rotação com velocidade e aceleração angular constantes
2. Relação entre variáveis lineares e angulares
3. Energia cinética de rotação
4. Cálculo da inércia rotacional. Teorema dos eixos paralelos.

Corpos Rígidos

Corpos rígidos são uma colecção de partículas as quais mantêm entre si posições relativas constantes.

É portanto, **um sistema de partículas** com propriedades especiais.

Exemplos de corpos rígidos simples



Movimento de Corpos Rígidos

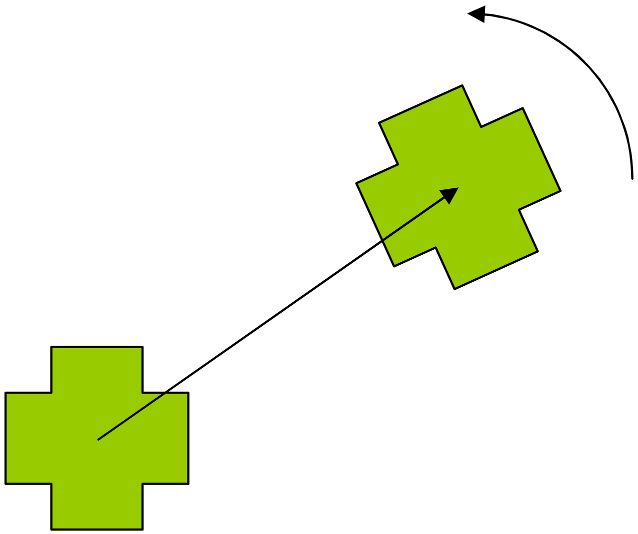
Um movimento de um corpo rígido pode ser decomposto na soma de

Movimento de Translação + Rotação em torno de um eixo fixo

Translação de Corpos Rígidos

O seu estudo consiste na aplicação da Segunda Lei de Newton ao Centro de Massa supondo que neste ponto existe uma partícula de massa igual à massa total M, e onde estão aplicadas todas as forças externas ao corpo rígido. i.e.

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$$

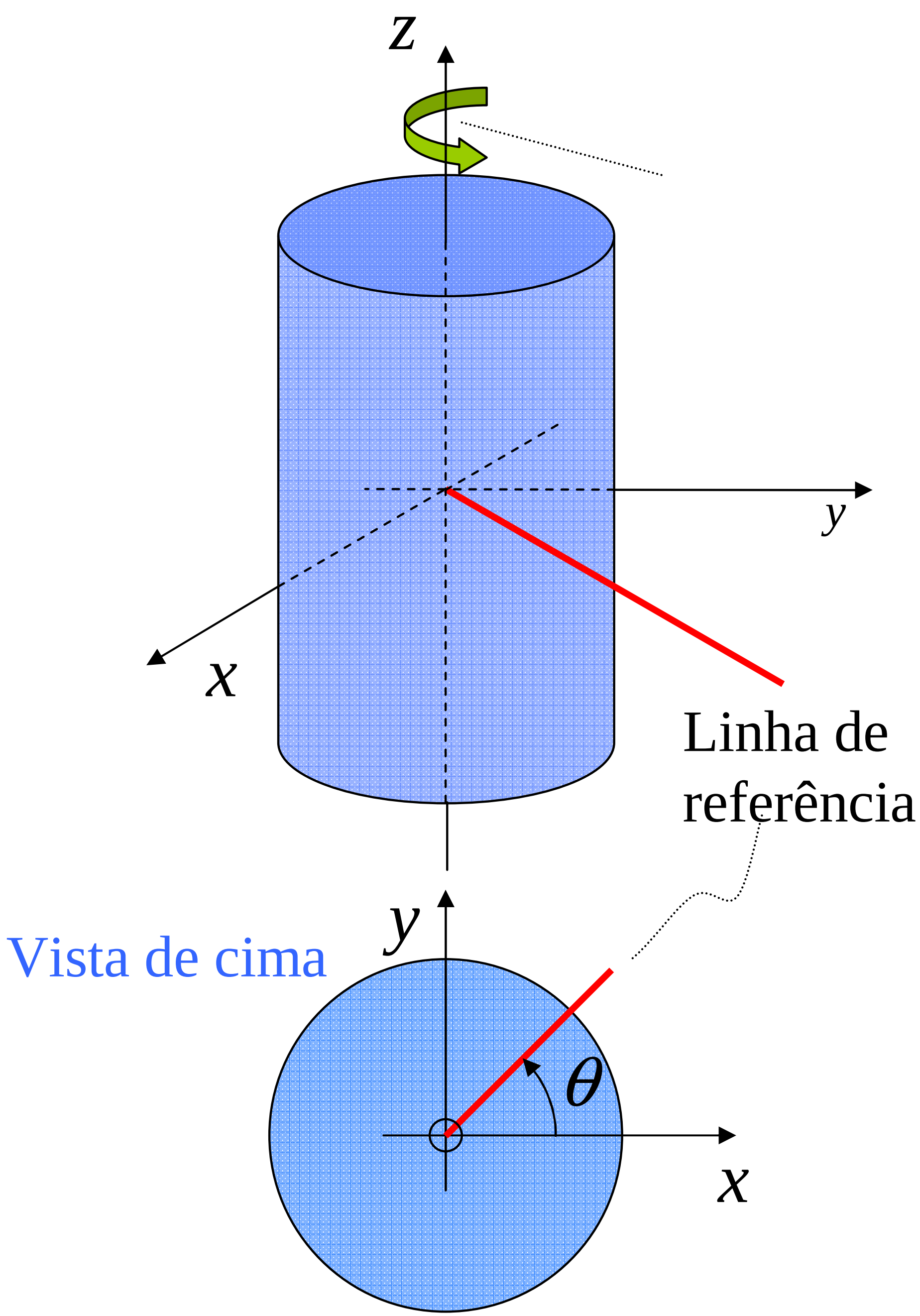


Rotação de Corpos Rígidos

Cinemática

Dinâmica

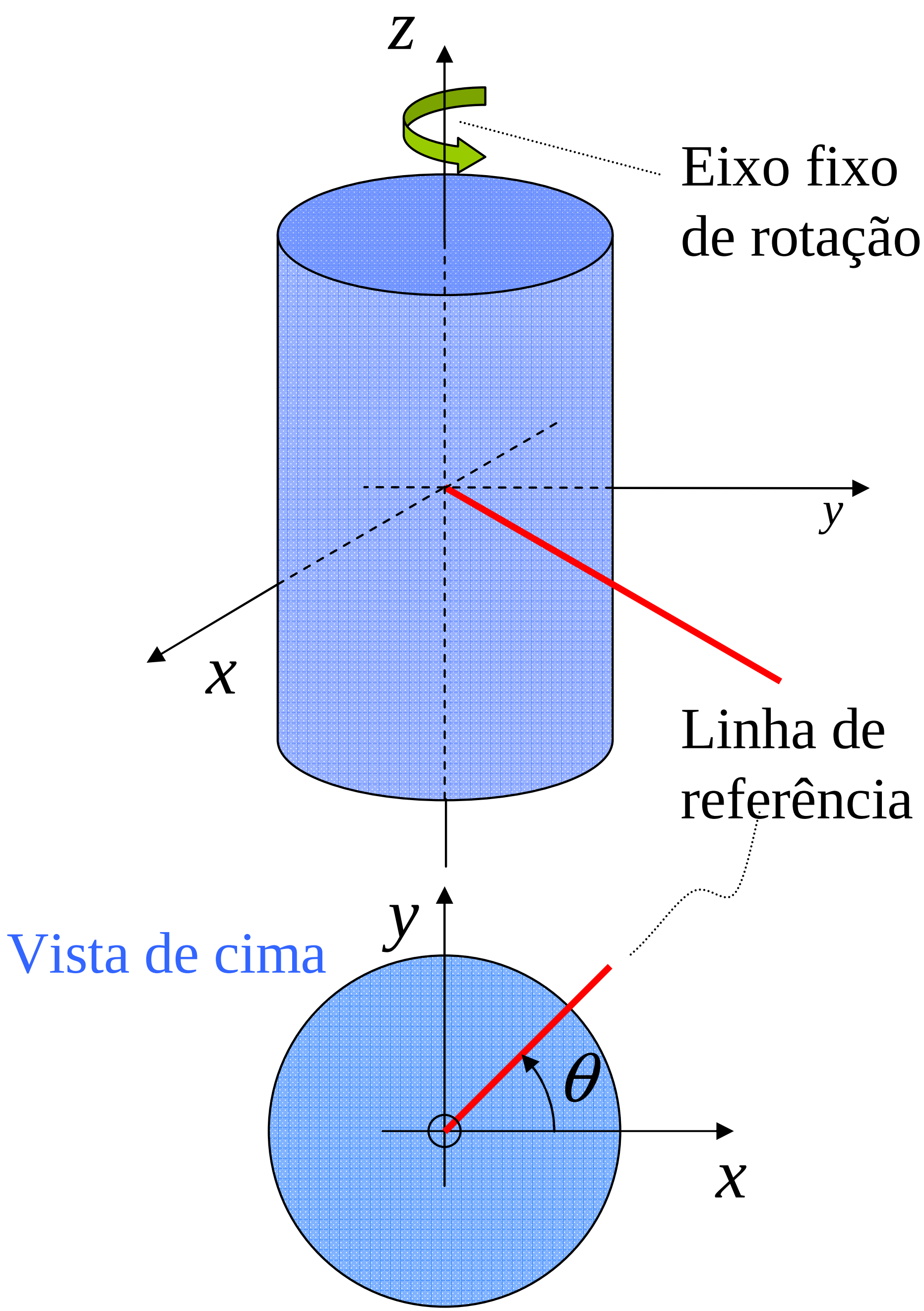
Eixo de Rotação



Todas as partículas do corpo rígido rodam com a **mesma velocidade angular** em torno do eixo fixo de rotação.

O eixo de rotação pode localizar-se em qualquer ponto do corpo rígido ou fora dele.

Movimento de Rotação de um Corpo Rígido (Cinemática)



Posição angular (da linha de referência)

$$\theta [rad]$$

Velocidade angular é o ângulo descrito por unidade de tempo pela linha de referência

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} [rad/s]$$

Aceleração angular é taxa de variação da velocidade angular

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$= \frac{d^2\theta}{dt^2} [rad/s^2]$$

Casos especiais

1) Rotação com **velocidade angular constante**, i.e. $\boxed{\omega = cte}$

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_o + \omega t}$$

θ_o é a posição angular inicial

2) Rotação com **aceleração angular constante**, i.e. $\boxed{\alpha = cte}$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \overset{\text{Integrando,}}{\Rightarrow} \quad \omega = \omega_o + \alpha t \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_o + \alpha t \overset{\text{Integrando,}}{\Rightarrow} \quad \theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

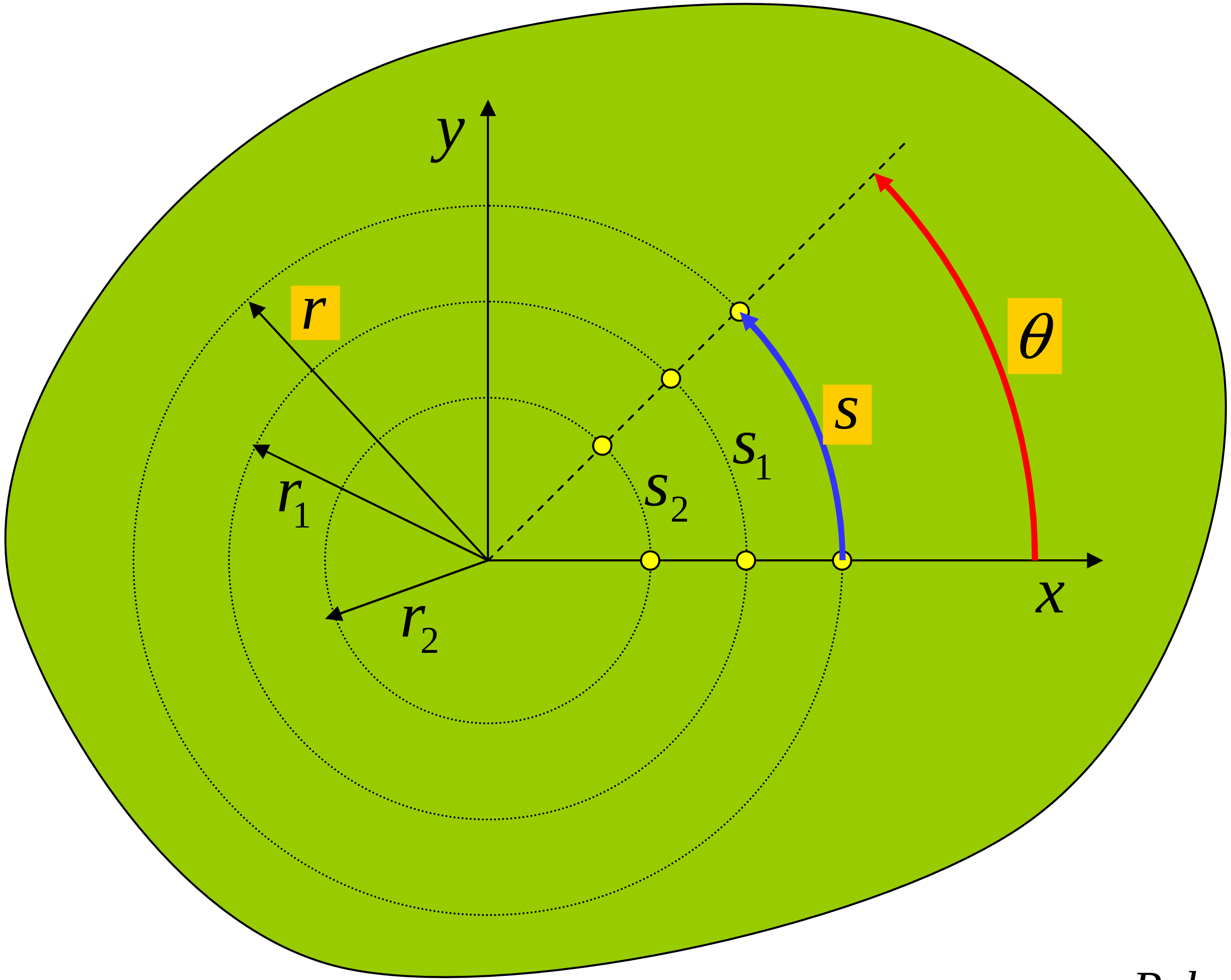
ω_o é a velocidade angular inicial

Analogias entre os Movimentos Linear (1D) e de Rotação

	Linear	Rotação
Posição	x	θ
Velocidade	v	ω
Aceleração	a	α
Movimento velocidade constante		
Velocidade	$v = cte$	$\omega = cte$
Posição	$x = x_o + vt$	$\theta = \theta_o + \omega t$
Movimento aceleração constante		
Aceleração	$a = cte$	$\alpha = cte$
Velocidade	$v = v_o + at$	$\omega = \omega_o + \alpha t$
Posição	$x = x_o + v_o t + at^2/2$	$\theta = \theta_o + \omega_o t + \alpha t^2/2$

Relação entre as variáveis lineares e angulares

Qual a relação entre o ângulo descrito θ e o comprimento do arco *s* percorrido por uma partícula do corpo?



Vista de cima (eixo z = eixo de rotação)

$$\boxed{s = r\theta}$$

r é a distância da partícula ao eixo de rotação

Derivando em ordem ao tempo obtemos,

$$\boxed{v = r\omega}$$

Atenção: v é o módulo da velocidade

Derivando-se novamente

$$\boxed{a_t = r\alpha}$$

Relação entre a aceleração tangencial e a aceleração angular

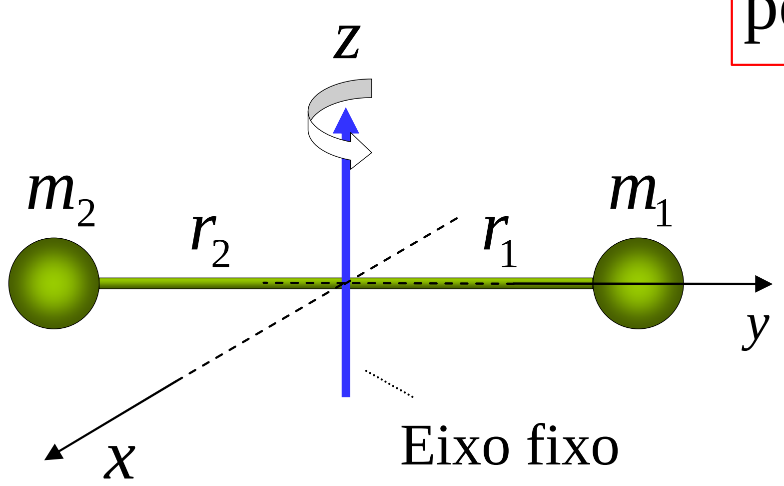
Energia Cinética de Rotação

Qual a energia cinética total do corpo rígido, em relação a um ponto no eixo de rotação?

Distância de cada massa ao eixo de rotação

$$E_c = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \ldots \quad = \frac{1}{2}\omega^2\left(\sum m_i r_i^2\right) = \frac{I\omega^2}{2}$$

porque $\boxed{v_i = \omega r_i}$



Eixo fixo de rotação

$$\sum m_i r_i^2$$

É uma constante que só depende da forma como as massas estão distribuídas relativamente ao eixo de rotação

Se as massas e as distâncias forem iguais, $I = m_2 r_2^2 + m_1 r_1^2 = 2mR^2$

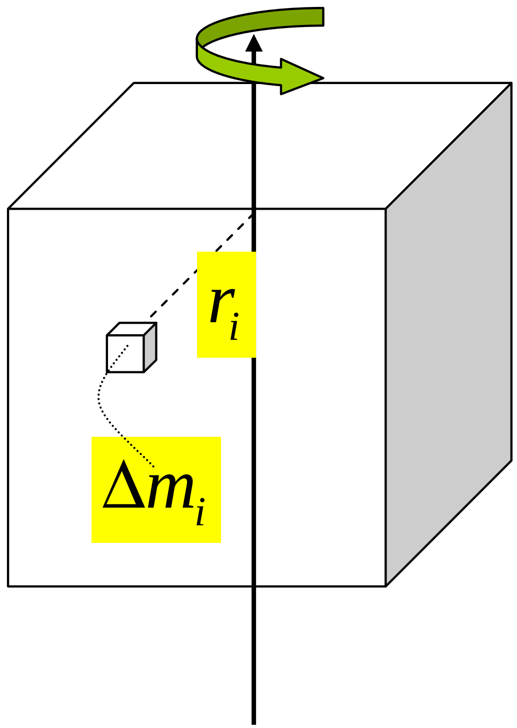
Energia cinética de rotação

$$\boxed{E_c = \frac{I\omega^2}{2}}$$

O momento de inércia I diz-nos como está distribuída a massa do corpo **relativa ao eixo de rotação**.

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Momento de Inércia de corpos sólidos



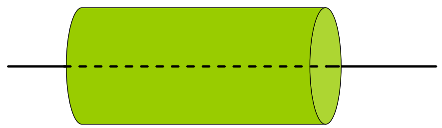
Quando o sistema consiste de um sólido contínuo e não massas discretas:

$$I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int_V r^2 dm$$

Sólidos uniformes

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV = \rho \int_V r^2 dV$$

Determine o momento de inércia de um CILINDRO relativamente ao eixo de rotação longitudinal passando pelo centro de massa.



Raio de Giração

$$I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i$$

Chama-se **raio de giração K** á distância do eixo a que deveria ser colocada a **totalidade** da massa do corpo para que o momento de inércia permanecesse constante. Assim,

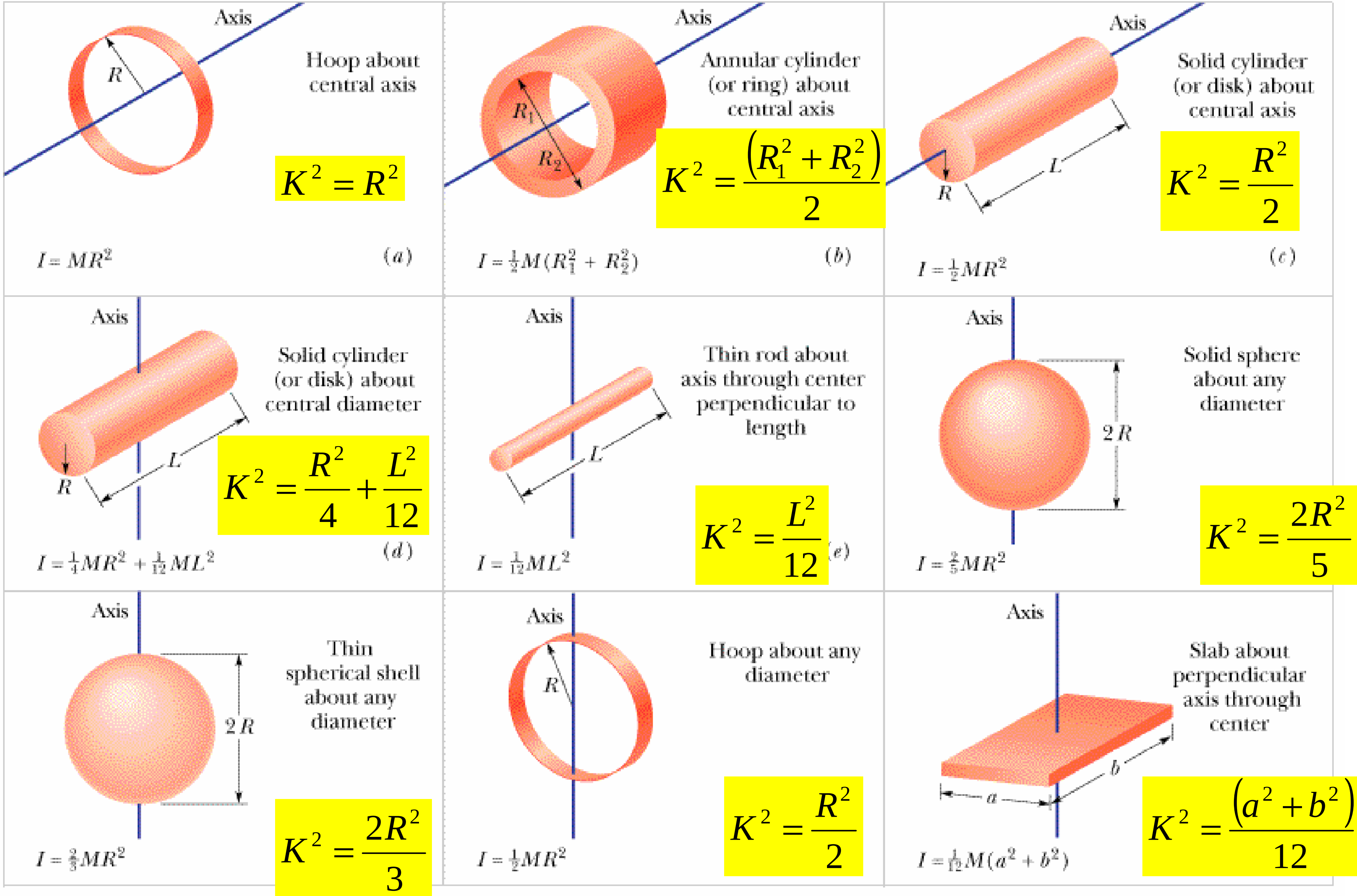
$$I = MK^2 \quad \Rightarrow \qquad K^2 = \frac{\sum_i \Delta m_i r_i^2}{M} = \sum_i \frac{\Delta m_i}{M} r_i^2$$

Vemos então que, para uma mesma massa, quanto maior o raio de giração maior será o momento de inércia

Quais os raios de giração de um cilindro e de uma esfera relativamente aos seus eixos naturais?

$$K_{cil} = \sqrt{\frac{\frac{MR^2}{2}}{M}} = 0.707R; \qquad K_{esf} = \sqrt{\frac{\frac{2MR^2}{5}}{M}} = 0.632R$$

Tabela de momentos de inércia, (eixo passando pelo CM)

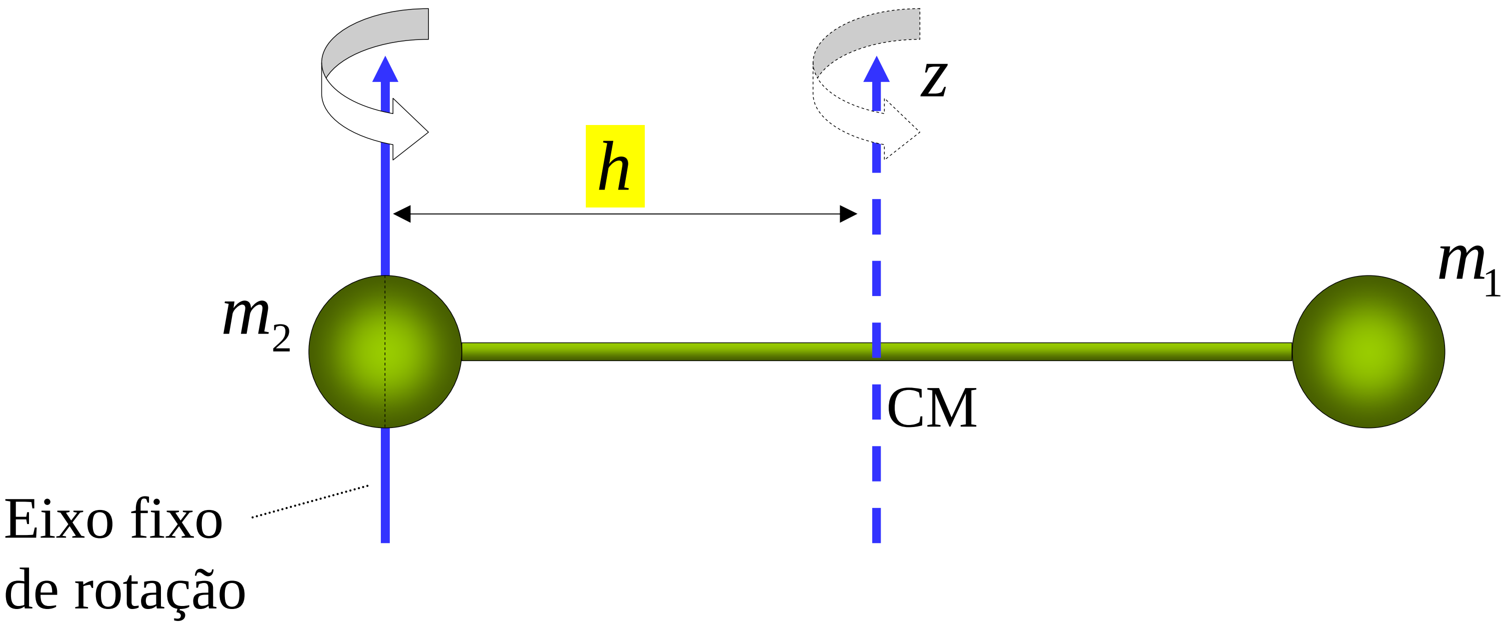


Teorema de Steiner dos eixos paralelos.

Os momentos de inércia relativamente a dois **eixos paralelos**, um passando pelo CM e outro não, estão relacionados entre si por:

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

Demonstre.



Corolário: O momento de inércia relativo ao um eixo que passa pelo centro de massa é **mínimo.**

A Lei da Conservação da Energia num Corpo Rígido

Num **corpo rígido** temos que levar em conta a energia cinética de rotação na equação da conservação de energia,

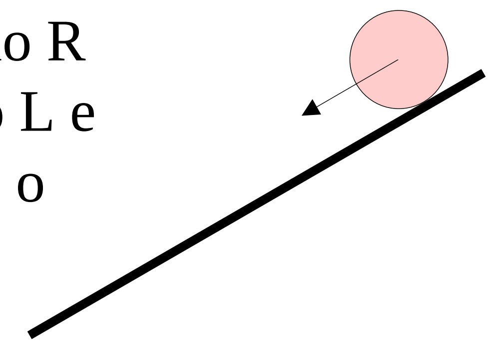
$$\boxed{\Delta E_c + \Delta U = W_{nc}}$$

$$\boxed{\left(\Delta E_{c,rot}^{cm} + E_{c,cm}\right) + \Delta U = W_{nc}}$$

$$\underbrace{\boxed{\frac{I_{cm}\omega^2}{2}} \boxed{+} \boxed{\frac{M v_{cm}^2}{2}}} \boxed{+ \Delta U = W_{nc}}$$

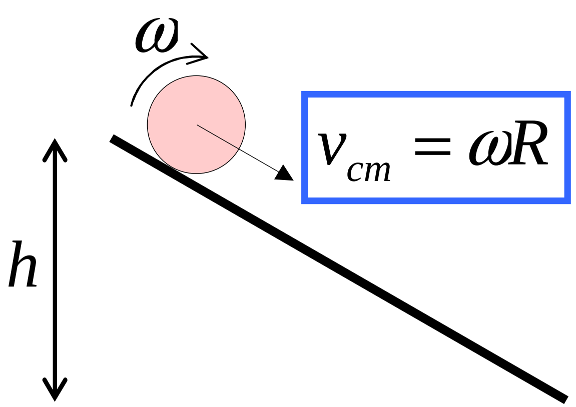
$$\boxed{\frac{I\omega^2}{2}} \boxed{+ \Delta U = W_{nc}}$$

Um cilindro, uma esfera e um anel todos de massa M e raio R rolam sem escorregar um plano inclinado de comprimento L e altura h. Calcular a velocidade do centro de massa quando o cilindro atingir o fundo do plano.



Problema

Considere duas esferas, com a mesma massa, o mesmo raio e com a mesma aparência exterior. Contudo, uma delas é maciça e a outra é oca. É possível determinar qual delas é maciça e qual é oca, sem as abrir? Justifique.



$$\boxed{v_{cm} = \omega R}$$

$$\boxed{\left(\frac{I_{cm}\omega^2}{2} + \frac{Mv_{cm}^2}{2}\right) + \Delta U_g = 0}$$

Conservação da energia mecânica

$$\boxed{I_{cm} = MK^2}$$

Momento de inércia

$$\boxed{\Delta U_g = -Mgh}$$

$$\boxed{v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\left(\frac{K}{R}\right)^2}}}$$

Como a bola oca tem um raio de giração maior do que a bola maciça, a velocidade do seu centro de massa irá ser menor no fundo do plano inclinado.

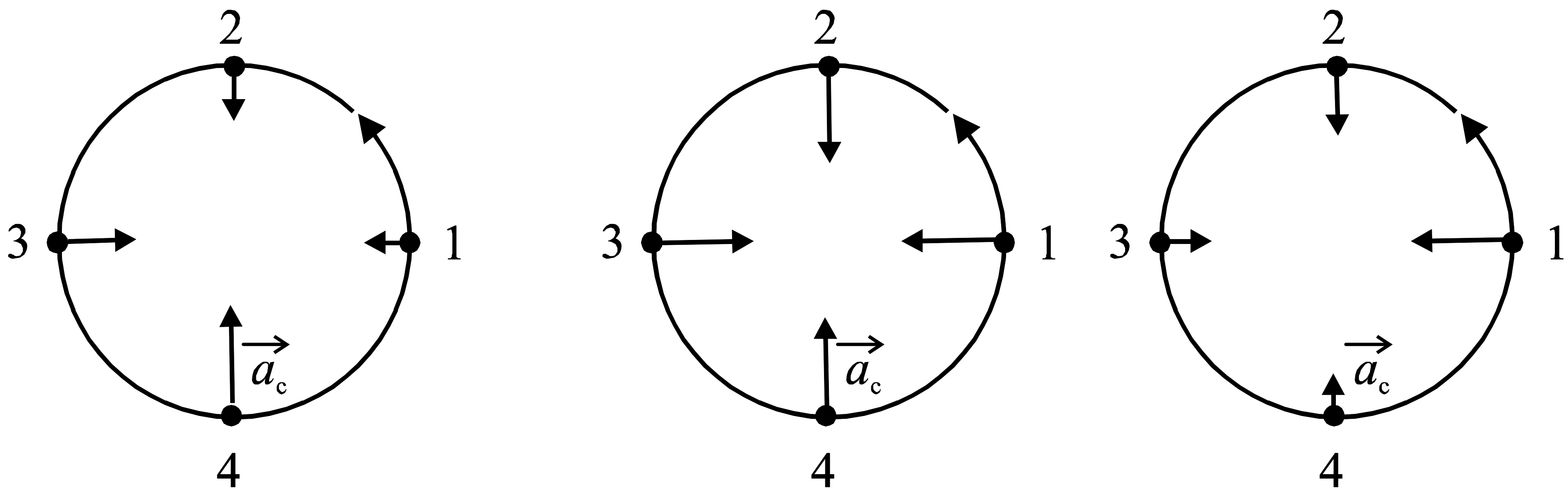
O Momento de Inércia e a Massa Inercial

O momento de inércia tem no movimento angular um papel semelhante ao da massa no movimento linear.

Contrariamente à massa, o momento de inércia depende da localização do eixo de rotação.

Exercício 1

As figuras mostram a componente vectorial centrípeta da aceleração, em quatro posições sucessivas da trajectória de uma partícula que se move descrevendo uma trajectória circular no sentido directo

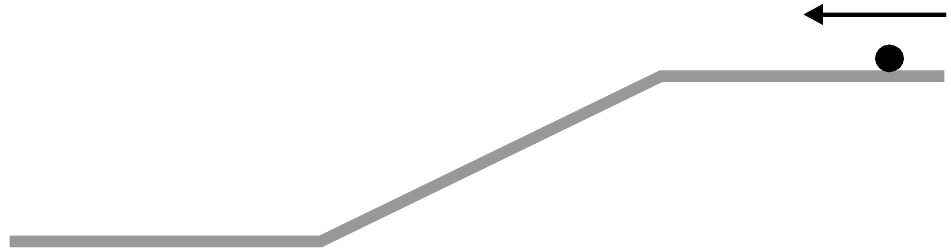


a) Em cada figura, desenhe o vector componente tangencial da aceleração , nos pontos 2 e 3 (se esse vector fôr nulo, escreva).

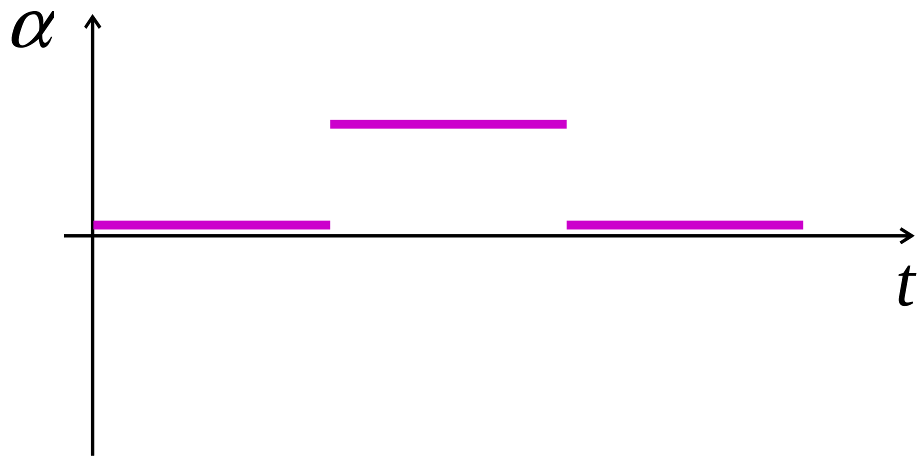
b) Considerando positiva a rotação no sentido directo, e negativa no sentido retrógrado, determine, para cada caso, se a aceleração angular, α, em torno do centro da trajectória é positiva, negativa ou nula.

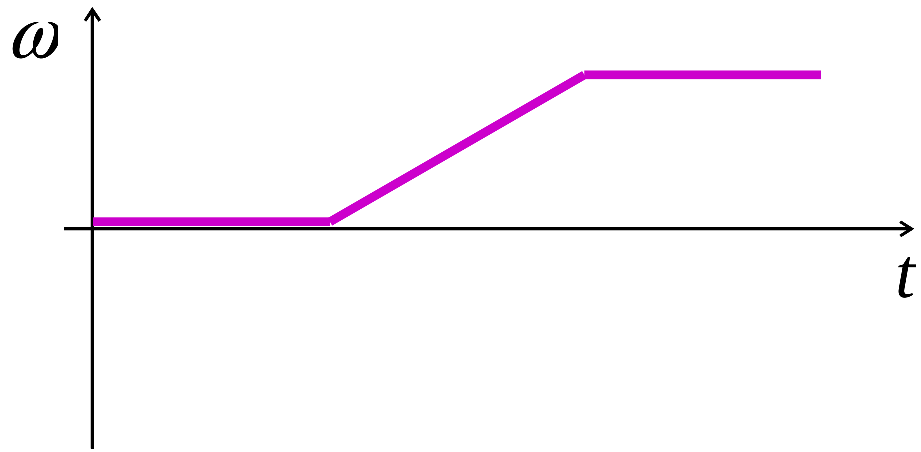
Exercício 2

Uma roda rola para a esquerda sobre uma superfície horizontal, desce em seguida uma rampa, e continua depois a rolar noutra superfície horizontal.



Desenhe os gráficos da velocidade e aceleração angulares da roda (em torno do seu eixo), em função do tempo

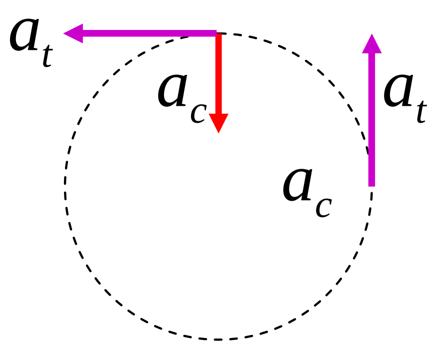




Exercício: movimento de rotação

Um carro que viaja sobre uma pista circular plana, acelera uniformemente a partir do repouso, com uma aceleração tangencial de 1.70 m/s².

O carro percorre um quarto de círculo até que derrapa para fora da pista. Determine o coeficiente de atrito estático entre o carro e a pista.



No instante de derrapagem a força de atrito estático tem o seu valor máximo

$$f_a = ma_c \Rightarrow \quad f_{ae,\max} = m\frac{v^2}{R}$$

$$\mu mg = m\left(2a_t R\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{R}$$

$$\mu = \frac{\pi a_t}{g}$$

O corpo acelera do repouso pelo que a sua velocidade após um quarto de circulo é,

$$v^2 = v_o^2 + 2as$$

$$= 2a_t\left(R\frac{\pi}{2}\right)$$

Exercício: movimento de rotação

Um corpo com 10 cm de raio tem movimento de rotação tendo uma aceleração tangencial de 3 m/s^2. Determine para um ponto na periferia em função do tempo:

1. Qual a aceleração angular
2. A velocidade angular
3. A posição angular
4. A aceleração centrípeta
5. As coordenadas cartesianas do movimento
6. A velocidade cartesiana do movimento.

$$\alpha = \frac{a_t}{R} = \frac{3}{0.1} = 30$$

$$\omega = \omega_o + \alpha t = 30t$$

$$\theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{\alpha t^2}{2} = \frac{30t^2}{2} = 15t^2$$

$$a_c = \omega^2 R = 900t^2 \cdot 0.1 = 90t^2$$

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) = 0.1\cos(15t^2) \\ y = r\sin(\theta) = 0.1\sin(15t^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = -3t\sin(15t^2) \\ v_y = 3t\cos(15t^2) \end{cases}$$

Aula 16 – Momentos e Momento angular

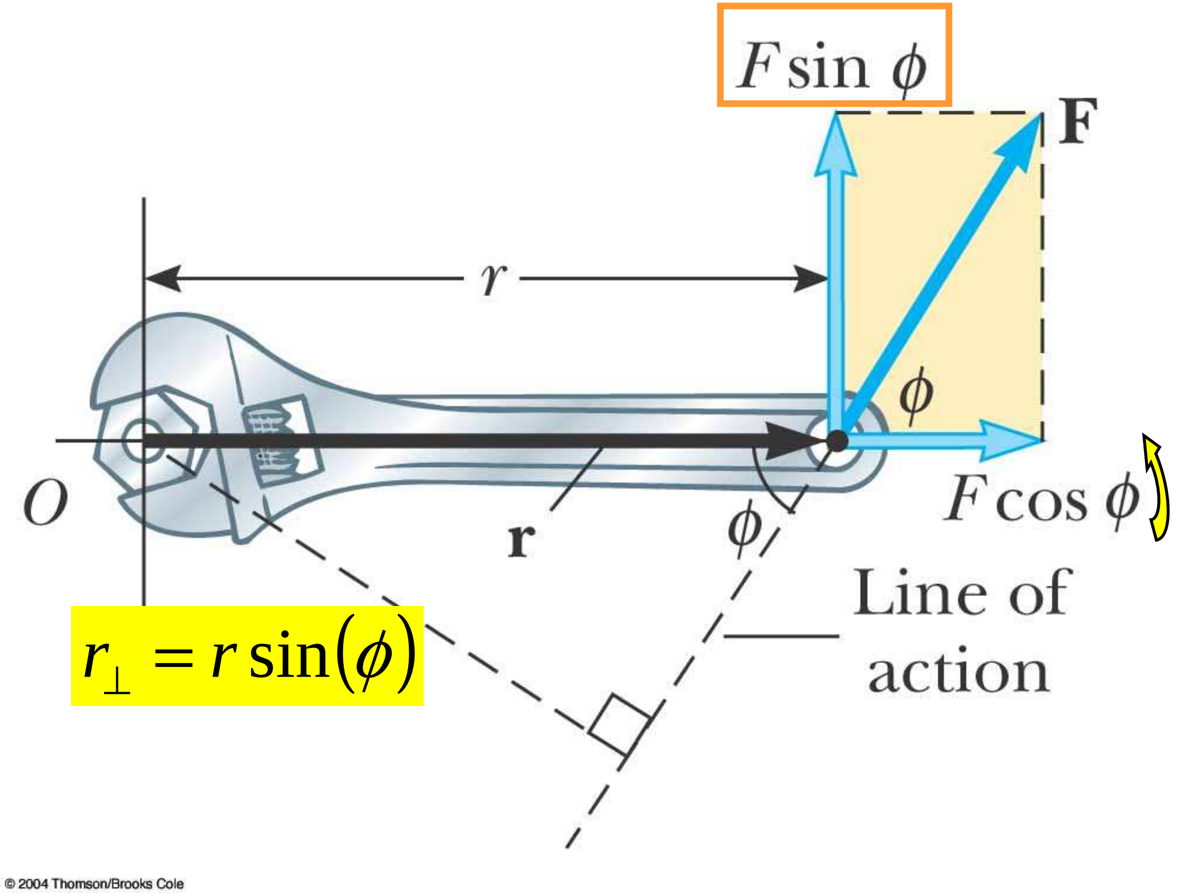
1. Momento de uma Força
2. Momento angular de uma partícula e de um sistema de partículas.
3. 2.ª Lei de Newton para a Rotação
4. Trabalho de Rotação

Torque / Momento de uma Força

Definição de torque

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \underbrace{rF\sin(\phi)}_{\text{módulo}}\,\vec{n}$$

O aperto do parafuso depende não só do módulo da força mas também da distância da linha de aplicação da força ao eixo de rotação da chave.



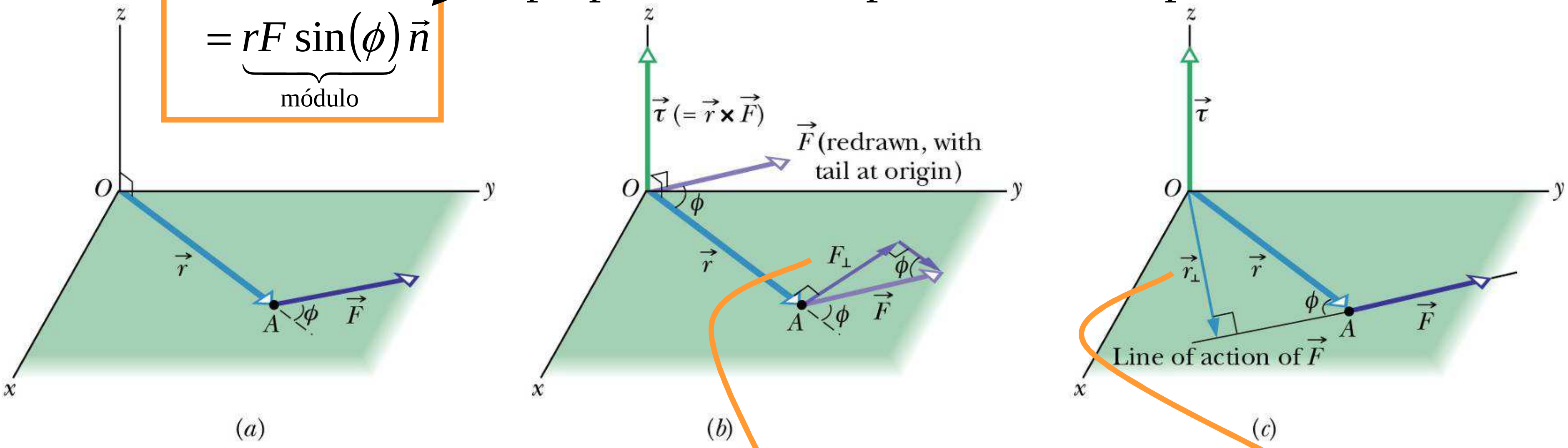
$$r_{\perp} = r\sin(\phi)$$

Sentido do momento da força

Momento de uma Força (cont.)

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{r}\times\vec{F} \\ &= \underbrace{rF\sin(\phi)}_{\text{módulo}}\,\vec{n}\end{aligned}}$$

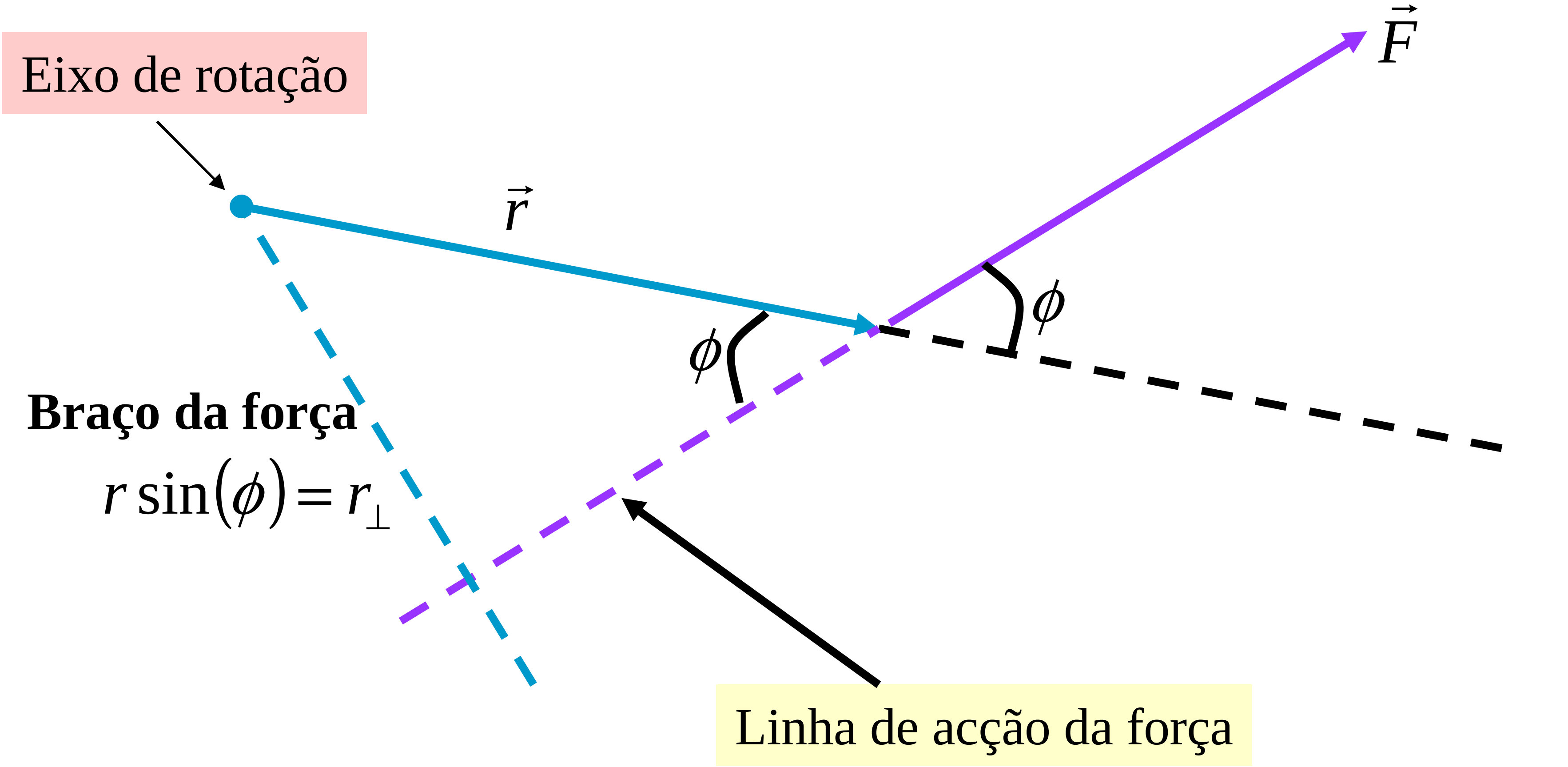
Vector unitário com direcção e sentido perpendicular ao plano formado por **r** e **F**



$$\tau = rF\sin(\phi) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned}\tau &= r[F\sin(\phi)] \\ &= rF_\perp\end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned}\tau &= [r\sin(\phi)]F \\ &= r_\perp F\end{aligned}$$

Cálculo do momento de uma força (relativa a um eixo)

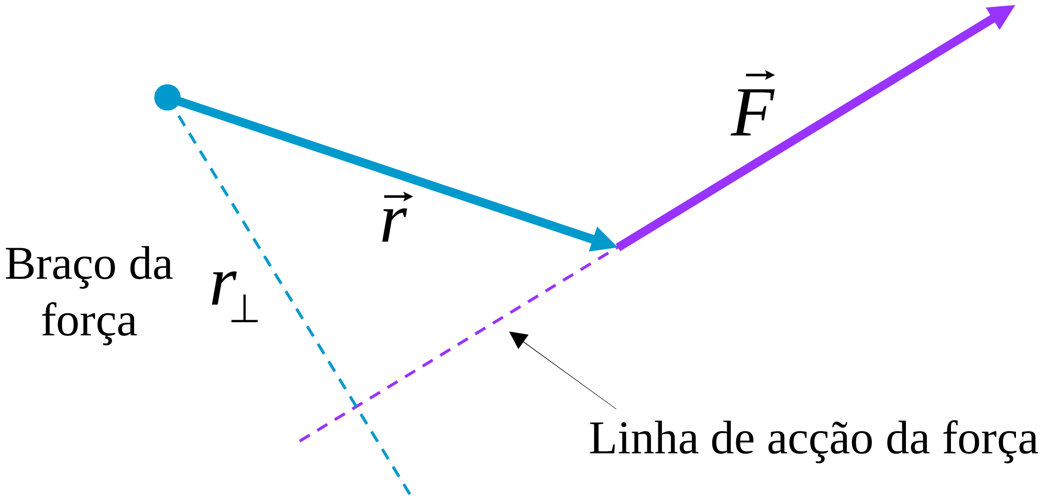
- Dois vectores, neste caso o vector-posição e a força, definem um plano.



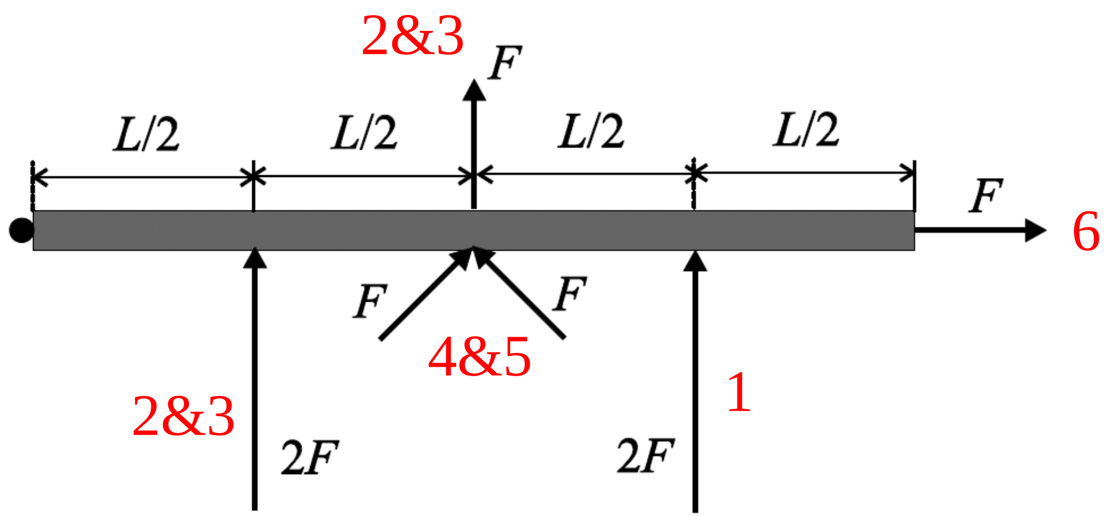
<u>Braço da força</u> – distância do eixo á linha de aplicação da força

Nota: se a linha de acção da força passar pelo eixo o momento da força é nulo.

Problema 2



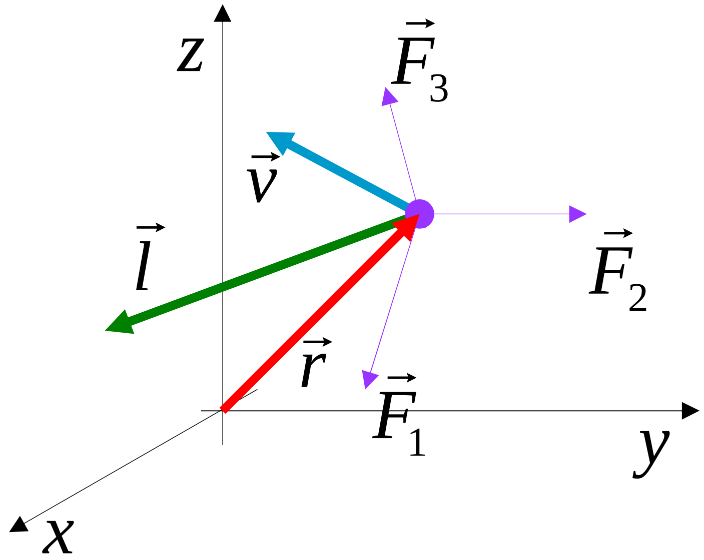
Seis forças, com módulo F ou 2F, são aplicadas a uma porta. Coloque por ordem, de módulo maior para o menos, os momentos de força τ_1 a τ_6, em relação ao eixo de rotação da porta.



Momento Angular de UMA Partícula

Definição

$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v}$$
$$= \vec{r} \times \vec{p}$$



Taxa de variação do momento angular:

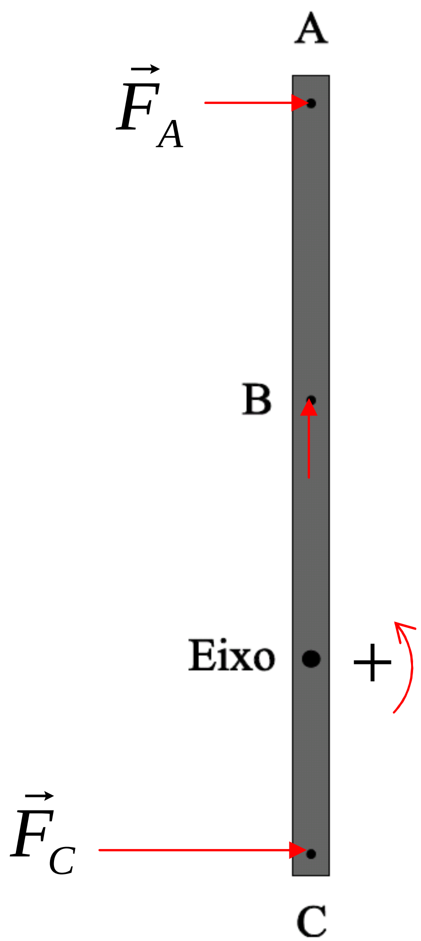
$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}$$
$$= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a}$$
$$= 0 + \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i$$

A taxa de variação do momento angular é igual á resultante dos torques/momentos aplicados

Problema 3

a) Desenhe um vector força aplicado no ponto A, cujo momento em relação ao eixo indicado seja negativo.
b) Desenhe um vector força aplicado no ponto B, cujo momento em relação ao eixo indicado seja nulo.
c) Desenhe um vector força aplicado no ponto C, cujo momento em relação ao eixo indicado seja positivo.



d) Para que haja um equilíbrio de momentos qual a relação entre os módulos das forças F_A e F_C?

$$-l \cdot F_A + \frac{l}{2} \cdot F_C = 0$$

$$F_A = \frac{F_C}{2}$$

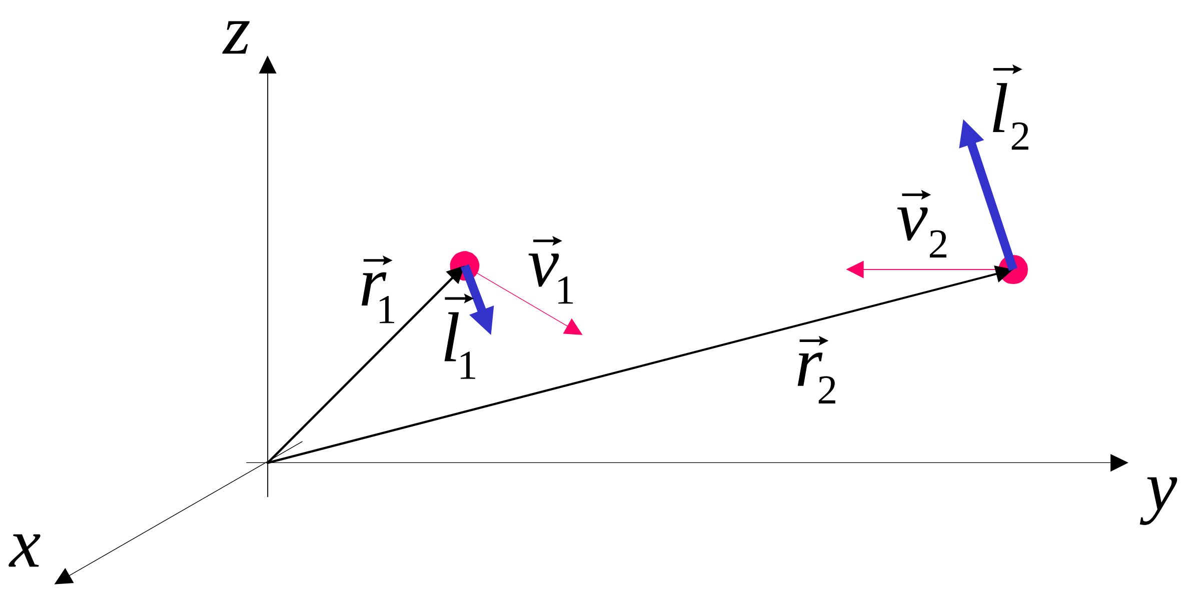
Dinâmica de Rotação de um sistema de partículas

1. **Momento angular de um sistema de partículas**
2. **Variação e Conservação do momento angular**
3. **Movimento em torno de um eixo fixo**

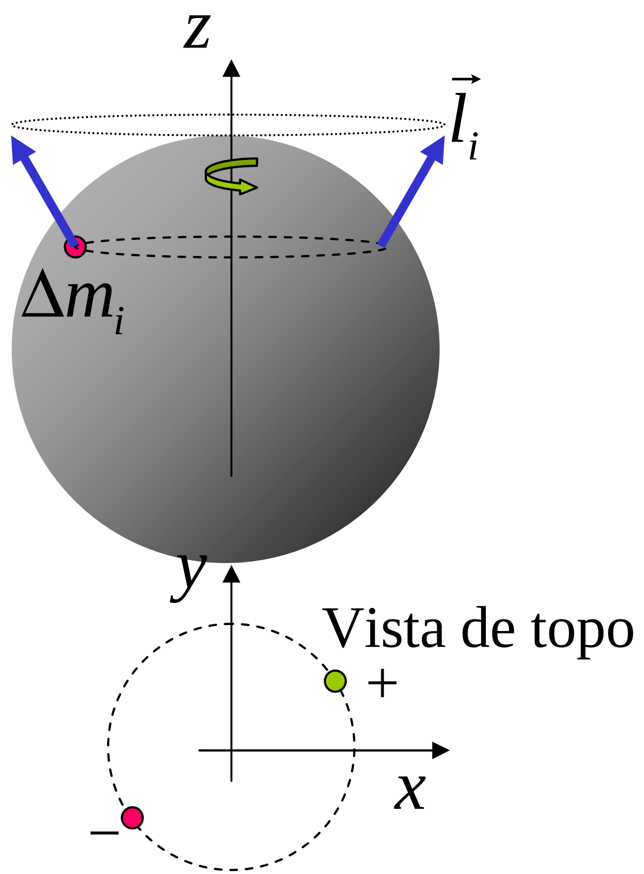
O Momento Angular de um Sistema de Partículas

Para um **sistema de partículas**, o ***momento angular total*** é a **soma** dos momentos angulares das partículas que constituem o sistema,

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 + \ldots \\ \vec{L} &= (\vec{r}_1 \times m\vec{v}_1) + (\vec{r}_2 \times m\vec{v}_2) + \ldots\end{aligned}}$$



Qual o momento angular de uma partícula de massa Δm_i quando o corpo rígido gira em torno de um eixo de rotação fixo?



Equações do movimento

$$\vec{r}_i = r_i \cos\omega t\ \hat{u}_x + r_i \sin\omega t\ \hat{u}_y + z\hat{u}_z$$

$$\vec{v}_i = -\omega r_i \sin\omega t\ \hat{u}_x + \omega r_i \cos\omega t\ \hat{u}_y$$

$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i$$

Movimento de rotação em torno de um eixo fixo

$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{l}_i = \left(-\Delta m_i \omega r_i z_i \cos \omega t\right)\hat{u}_x + \left(-\Delta m_i \omega r_i z_i \sin \omega t\right)\hat{u}_y + \left(\Delta m_i \omega r_i^{\,2}\right)\hat{u}_z$$

$$\vec{l}_i = \vec{l}_{xi}\hat{u}_x + \vec{l}_{yi}\hat{u}_y + \vec{l}_{zi}\hat{u}_z$$

Este é o momento angular individual de cada partícula de massa Δm

*O **momento angular total** calcula-se somando as contribuições de todas as massa para o momento angular.*

Sob certas condições de simetria as componentes L_x e L_y da quantidade de movimento angular do sólido anulam-se.

Analisemos a componente segundo z, (i.e. L_z). A soma das contribuições de todas as massas para a quantidade de movimento angular na direcção z é:

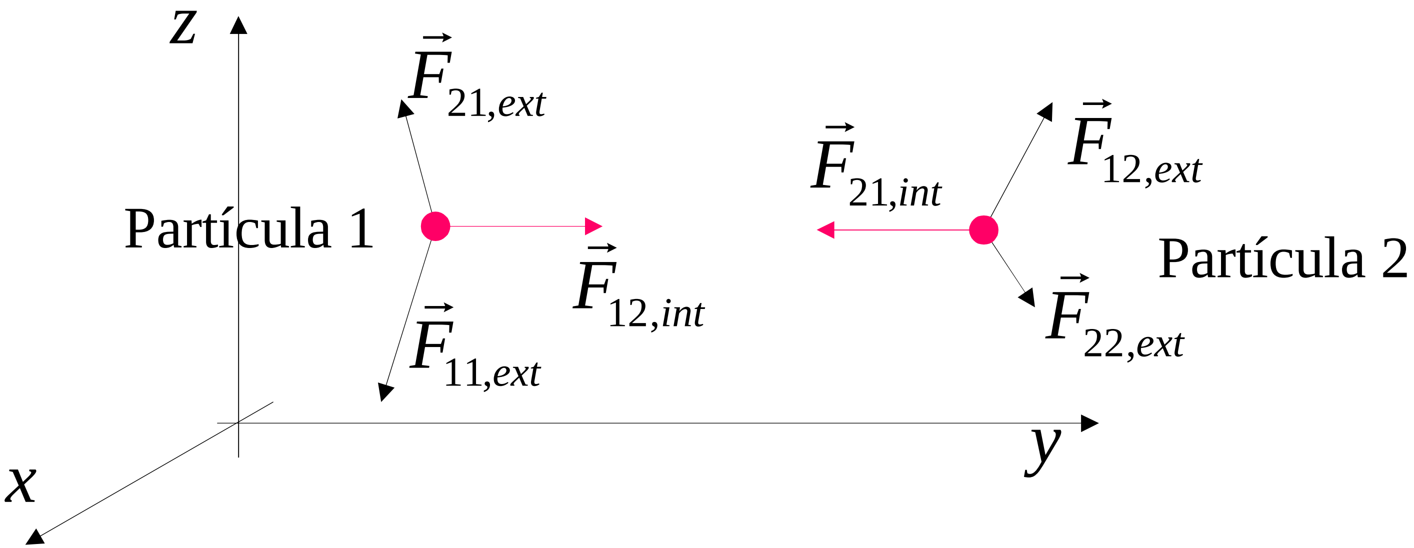
$$L_z = \sum l_{zi} = \sum \Delta m_i \omega r_i^{\,2} = \omega \sum \Delta m_i r_i^{\,2}$$

$$L_z = I_z \omega$$

A variação do momento angular de uma partícula

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right)$$
$$= \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}$$
$$= \vec{r} \times \sum \vec{F}_i + 0 = \sum_i \left(\vec{r} \times \vec{F}_i\right)$$

A variação do momento angular de uma partícula é igual á soma dos momentos das forças aplicados na partícula.



A variação do momento angular de um sistema

A **taxa de variação da quantidade de movimento angular <u>de um sistema</u>** de duas partículas é,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{l}_1}{dt} + \frac{d\vec{l}_2}{dt}$$

$$= \sum_i \left(\vec{r}_1 \times \vec{F}_{i1}\right) + \sum_i \left(\vec{r}_2 \times \vec{F}_{i2}\right)$$

$$= \sum_i \left(\vec{r}_1 \times \vec{F}_{i1,ext}\right) + \sum_i \left(\vec{r}_2 \times \vec{F}_{i2,ext}\right) + \left(\vec{r}_1 \times \vec{F}_{21,\text{int}}\right) + \left(\vec{r}_2 \times \vec{F}_{12,\text{int}}\right)$$

$$= \sum_i \left(\vec{r}_1 \times \vec{F}_{i1,ext}\right) + \sum_i \left(\vec{r}_2 \times \vec{F}_{i2,ext}\right) + \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \vec{F}_{21,\text{int}}$$

$$= \sum_i \left(\vec{r}_1 \times \vec{F}_{i1,ext}\right) + \sum_i \left(\vec{r}_2 \times \vec{F}_{i2,ext}\right)$$

Os momentos das forças internas anulam-se, dois a dois. Porquê?

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{ext}}$$

Conservação do momento angular.

A taxa de variação do momento angular de um sistema é igual a soma dos momentos aplicados pelas forças externas ao sistema.

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{ext}}$$

Isto é válido para qualquer sistema e em particular para um corpo rígido.

COROLÁRIO:

Se a resultante dos momentos das forças externas aplicadas for nula, então a quantidade de movimento angular do sistema permanece constante para qualquer referencial inercial.

Analogia Linear-Rotação

	Linear	Rotação
Posição	x	θ
Velocidade	v	ω
Aceleração	a	α
Massa	m	I
Momento	P	L
Força	F	τ

Equação do movimento de rotação de um corpo rígido

Sabemos que a variação do momento angular de um sistema é igual á soma dos momentos das forças externas ao sistema. Assim,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{ext} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dL_x}{dt} = \sum \tau_{x,ext} \\ \dfrac{dL_y}{dt} = \sum \tau_{y,ext} \\ \dfrac{dL_z}{dt} = \sum \tau_{z,ext} \end{cases}$$

<u>Então e relativamente ao eixo fixo</u> podemos então afirmar que:

$$\sum \tau_{z,ext} = \frac{dL_z}{dt}$$

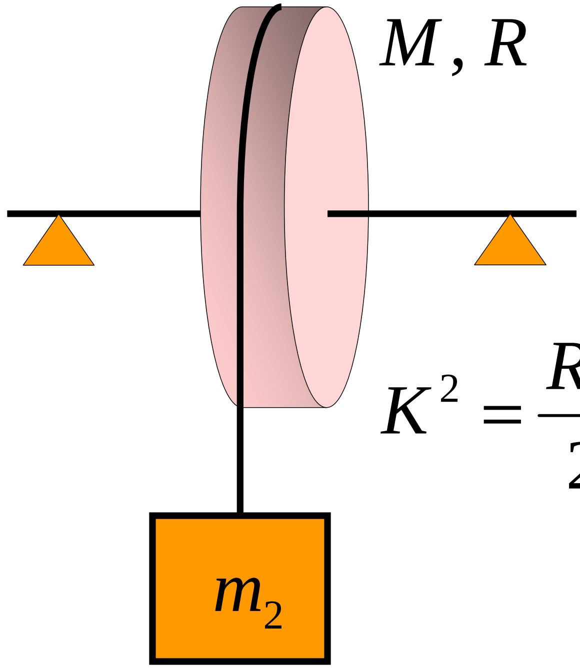
$$= I_z \frac{d\omega}{dt}$$

$$\sum \tau_{z,ext} = I_z \alpha$$

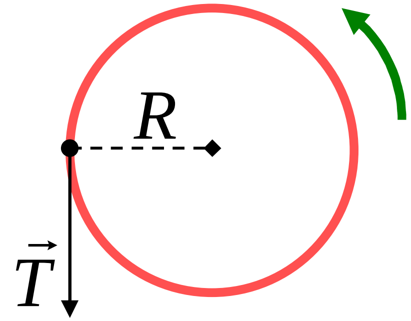
A resultante dos momentos aplicados em **<u>relação ao eixo de rotação</u>** é igual ao produto do momento de inércia pela aceleração angular. É costume por isso chamar a esta equação a **Lei de Newton para a rotação**

Problema

Determine a aceleração angular do sistema ilustrado na figura que tem um corpo suspenso cuja massa é de 1 kg. Os dados para o disco são 0,5 m de raio e 20 kg de massa.



$$K^2 = \frac{R^2}{2}$$



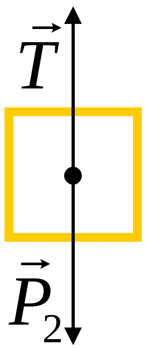
1. Lei de Newton da rotação

$$TR = I\alpha$$

$$= \left(MK^2\right)\alpha$$

3. Equação de ligação entre os dois movimentos:

$$a = \alpha R$$



2. Lei de Newton

$$m_2 g - T = m_2 a$$

Donde,

$$\alpha = \frac{m_2 g}{\left(m_2 + \frac{M}{2}\right)R} = 3.64\, rad/s^2$$

Trabalho realizado pelo momento de uma força

Sabemos pelo teorema da energia cinética que a variação da energia cinética de rotação é igual ao **trabalho resultante.**

$$dE_{c,rot} = dW_{\tau,res}$$

$$d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) =$$

$$\frac{I}{2}2\omega\, d\omega =$$

$$\underbrace{\left(I\ \frac{d\omega}{dt}\right)}_{\sum\tau}\underbrace{\omega dt}_{d\theta} =$$

$$\left(\sum\tau_{ext}\right)d\theta = dW_{\tau,res}$$

O trabalho realizado pelo momento da força é portanto dado por,

$$\boxed{\tau_i\ d\theta = dW_{\tau_i}}$$

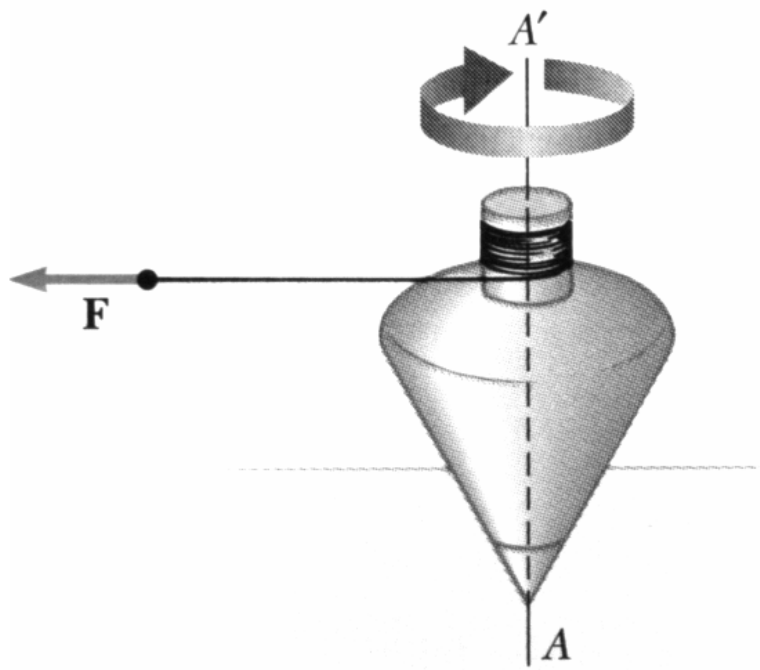
Se o momento for constante, o trabalho realizado numa rotação de ângulo θ é,

$$\boxed{W_{\tau_i} = \tau_i\ \theta}$$

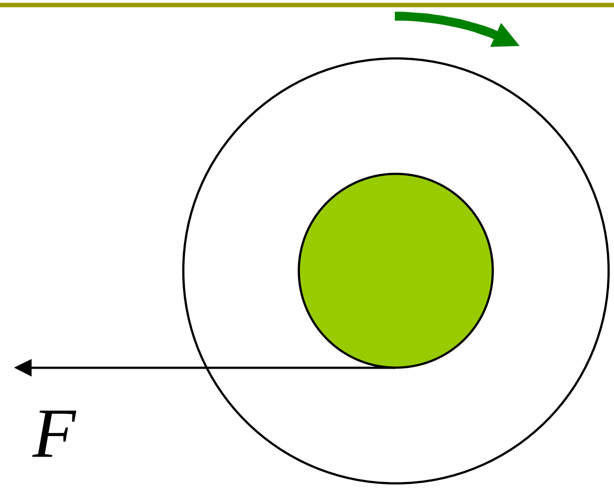
Problema

Um pião, como o representado na figura, tem um momento de inércia 4.00×10^{-4} kg m² e está inicialmente em repouso. Ele é livre de rodar em torno do eixo estacionário AA′. A corda enrolada à volta da pega do pião é puxada de forma a se manter uma tensão constante de 5.57 N.

Supondo que a corda não escorrega enquanto é desenrolada, determine a velocidade angular do pião depois de terem sido puxados 80.0 cm de corda. R: 149rad/s



Problema (cont.)



Pelo Teorema da Energia Cinética:

$$\Delta E_{c,rot} = W_{\tau}$$

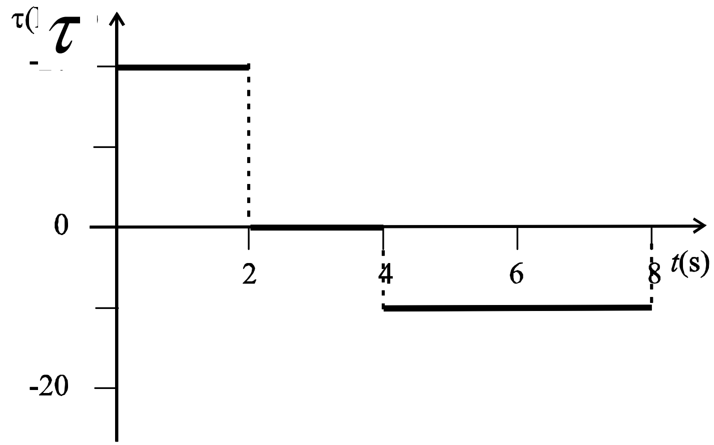
$$\frac{I\omega^2}{2} - \frac{I\omega_o^2}{2} = \tau\theta$$

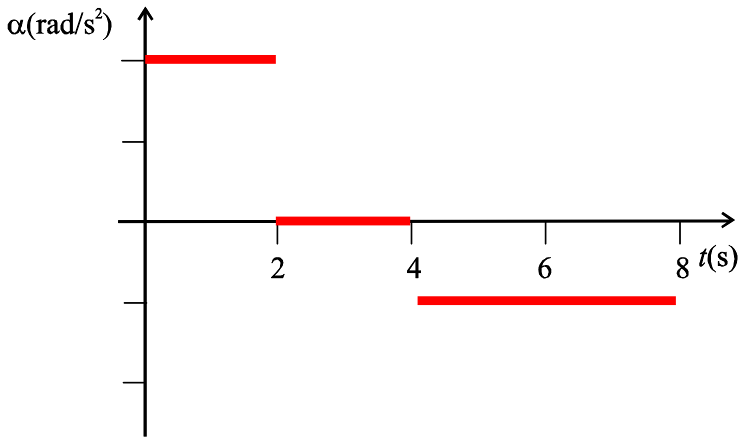
$$\frac{I\omega^2}{2} = (FR)\left(\frac{s}{R}\right) \Rightarrow \omega = \sqrt{2\frac{5.57\times 0.8}{4\times 10^{-4}}} = 149\, rad/s$$

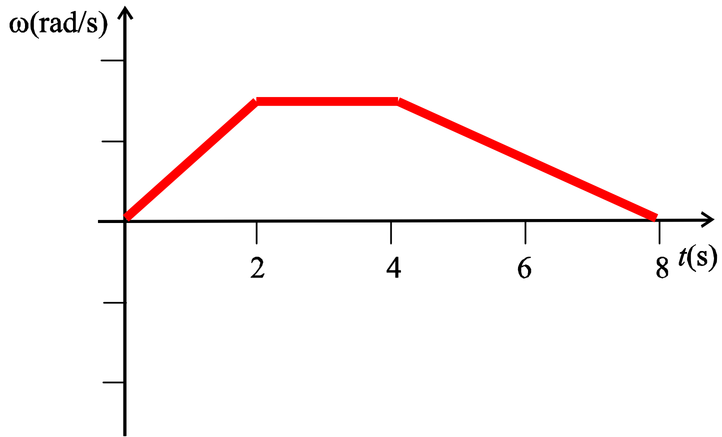
Problema

O primeiro gráfico indica o valor do momento, em relação ao eixo, da força resultante exercida numa roda de amolador, em função do tempo. O momento de inércia da roda em relação ao eixo é I = 10 kg m².

Desenhe os correspondentes gráficos da aceleração angular em função do tempo, $\alpha = \alpha(t)$, e da velocidade angular em função do tempo, $\omega = \omega(t)$. Suponha $\omega(0) = 0$.







Movimento de Rolamento

1. Movimento de rolamento
2. Equação geral do movimento de rotação
3. Aplicações.

Movimento de Rolamento.

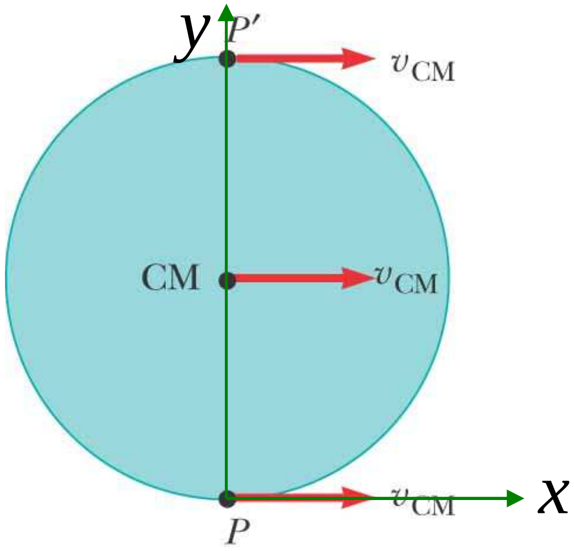
O rolamento pode ser considerado uma **combinação** de um movimento de translação pura do centro de massa com um movimento de rotação pura em torno do centro de massa.

1) Posição do CM relativa a um observador

$$\begin{cases} x_{cm} = v_{cm} t = \omega R t \\ y_{cm} = R \end{cases}$$

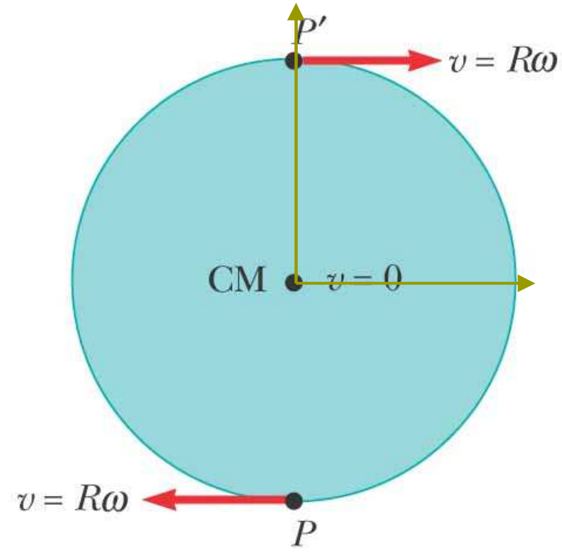
2) Posição de um ponto da periferia **relativa** ao CM

$$\begin{cases} x_{p,cm} = R\cos(-\omega t) \\ y_{p,cm} = R\sin(-\omega t) \end{cases}$$



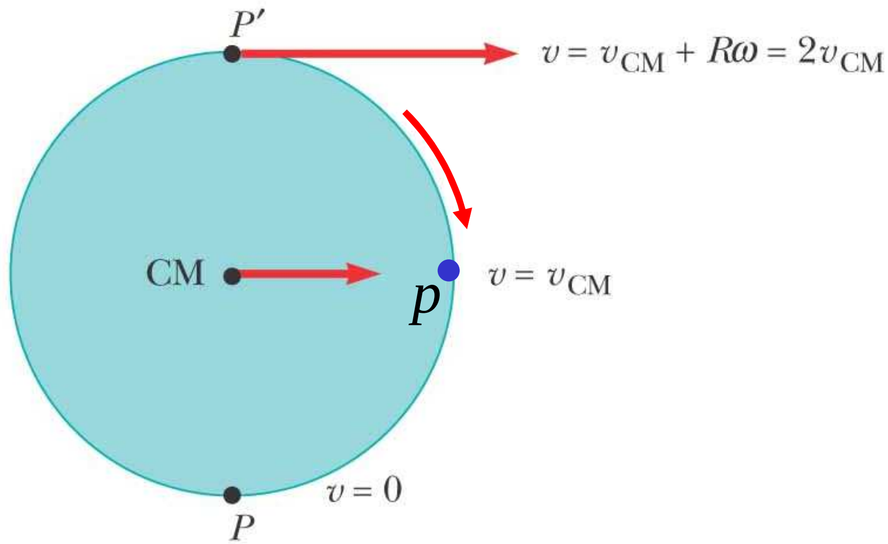
Translação pura do CM

+



Rotação pura em torno do CM

=



Rotação instantânea em torno de P

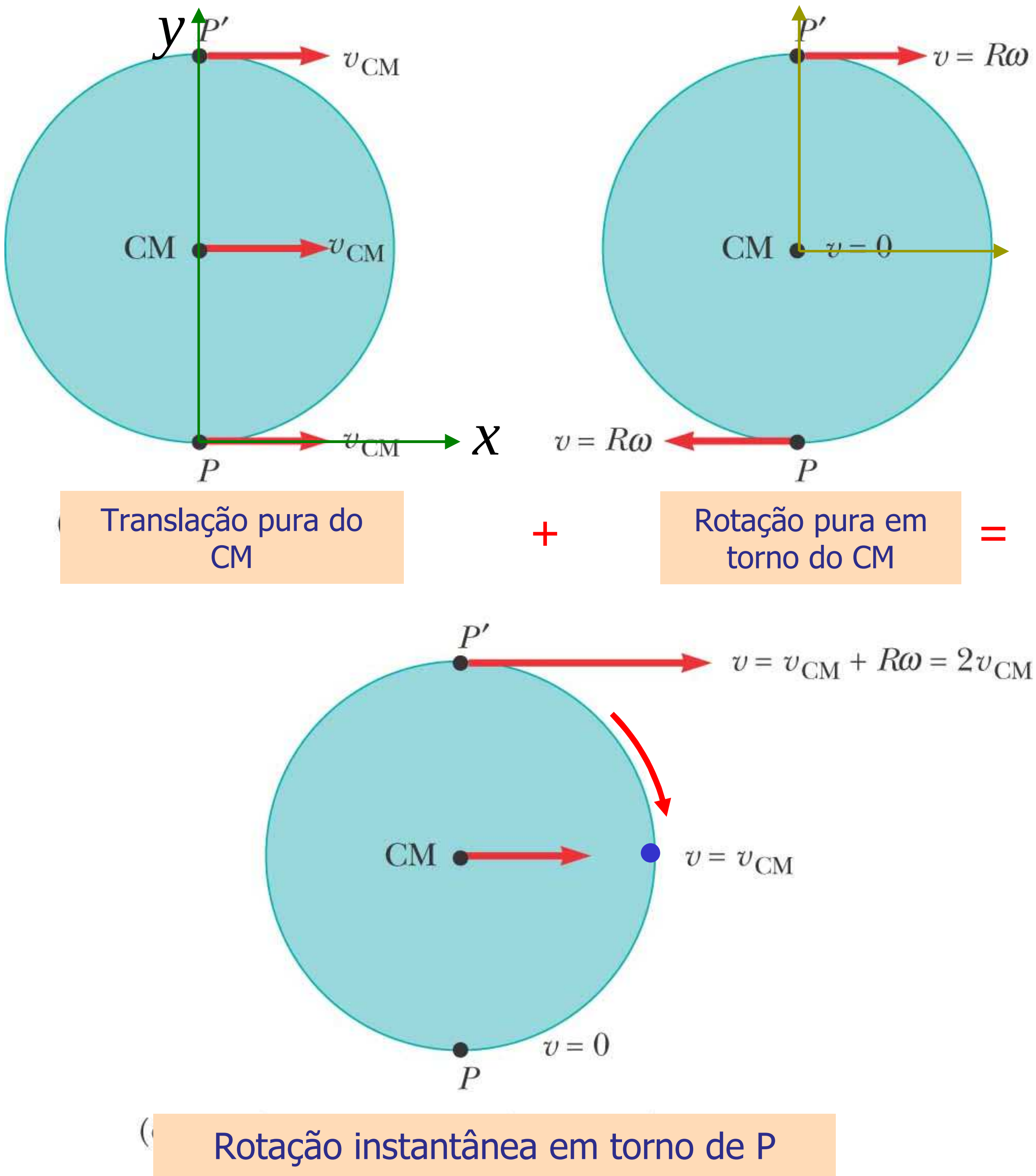
Rolamento

3) Posição de p relativa a um observador estacionário

$$\begin{cases} x_p = \omega R t + R\cos(\omega t) \\ y_p = R - R\sin(\omega t) \end{cases}$$

4) Velocidade de p relativa a um observador estacionário

$$\begin{cases} v_{xp} = \omega R - \omega R\sin(\omega t) \\ v_{yp} = -\omega R\cos(\omega t) \end{cases}$$



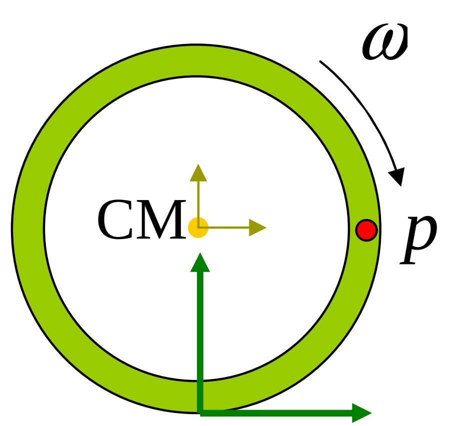
Problema

Uma bicicleta com rodas de 80 cm de diâmetro rola numa pista horizontal com velocidade de 5.6 m/s. Na borda da roda traseira existe uma pequena mancha.

a. Qual é o módulo da velocidade angular das rodas?

b. Qual é o módulo da velocidade linear da mancha quando se encontra a 80 cm do solo?

c. Qual é o módulo da velocidade linear da mancha quando se encontra a 40 cm do solo?



Problema, cont.

a) Velocidade angular

$$\omega = \frac{5.6}{0.4} = 14\, rad/s$$

b) Velocidade de um ponto a 80 cm do solo

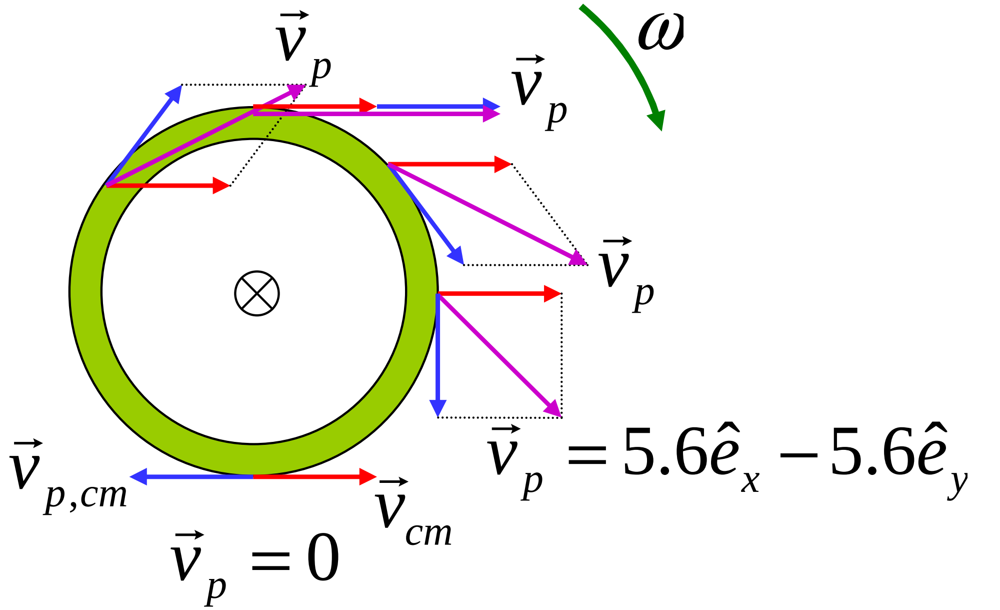
$$\vec{v}_p = 2 \cdot 5.6 = 11.2\hat{e}_x$$

$$\left|\vec{v}_p\right| = 11.2\, m/s$$

c) Velocidade de um ponto a 40 cm do solo

$$\vec{v}_p = 5.6\hat{e}_x \mp 5.6\hat{e}_y$$

$$\left|\vec{v}_p\right| = 7.91 m/s$$



Equação do movimento relativo ao centro de massa

Sabemos que num sistema de eixos qualquer: $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{ext}$$

Mas o valor do momento angular e os momentos relativamente a um sistema de eixos e um sistema de eixos centrado no CM estão relacionados:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i + \vec{L}_{cm}$$
$$= \vec{L}^{cm} + \vec{L}_{cm}$$

O momento angular total do sistema é a soma do momento angular do CM e do momento angular do sistema relativamente ao CM.

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \sum \vec{\tau}^{cm}_{ext} + \vec{r}_{cm} \times \sum \vec{F}_{ext}$$

O momento total das forças externas é a soma dos momentos das forças relativa ao CM e do momento da resultante das forças externas como se esta estivesse aplicada no CM.

Equação do movimento relativo ao centro de massa

Substituindo as eqs na equação acima e não esquecendo que o movimento do CM obedece a:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$$

Obtemos para o eixo fixo passando pelo referencial do CM :

$$\frac{d\vec{L}^{cm}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{ext}^{\,cm}$$

$$\frac{d}{dt}\left(I^{cm}\omega\right) =$$

$$I^{cm}\alpha = \sum \vec{\tau}_{ext}^{\,cm}$$

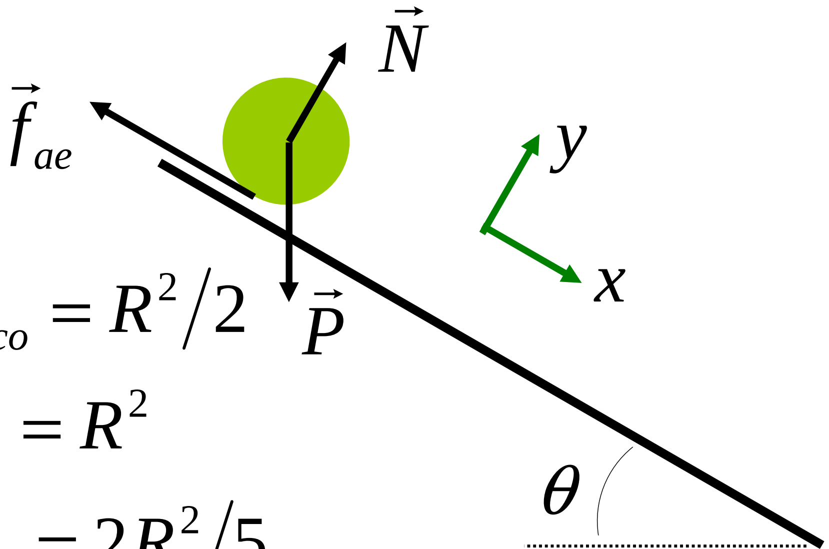
i.e. a variação da quantidade de movimento angular do corpo rígido relativo ao eixo fixo passando pelo CM é igual á resultante do momento das forças externas relativamente ao CM.

Problema

Considere um disco sólido uniforme, que rola por um plano inclinado abaixo.

a) Determine a aceleração do centro de massa do disco, e compare esta aceleração com a que teria um aro com a mesma massa e raio externo.

b) Qual o valor mínimo do coeficiente de atrito que é necessário para manter o disco em rolamento puro?



$$K_{disco}^2 = R^2/2$$

$$K_{aro}^2 = R^2$$

$$K_{bola}^2 = 2R^2/5$$

1) Aplicando a 2ª Lei de Newton ao movimento do CM obtém-se,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} mg\sin(\theta) - f_{ae} = ma_x \\ N - mg\cos(\theta) = 0 \end{cases}$$

2) Aplicando a 2ª Lei de Newton da Rotação em relação ao CM

$$\tau = I\alpha$$

$$f_{ae}R = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{f_{ae}R}{MK^2}$$

3) Equação de ligação entre o movimento de rotação e o de translação do CM

$$a_x = \alpha R$$

4) A força de atrito estático máxima é:

$$f_{ae,\max} = \mu N$$

Problema (cont.)

4) Aceleração do CM

5) Coeficiente de atrito mínimo depende do objecto,

$$\mu > \frac{\tan(\theta)}{\left(1 + \dfrac{R^2}{K^2}\right)}$$

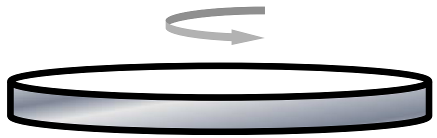
$$K_{disco}^2 = R^2 / 2$$

$$K_{aro}^2 = R^2$$

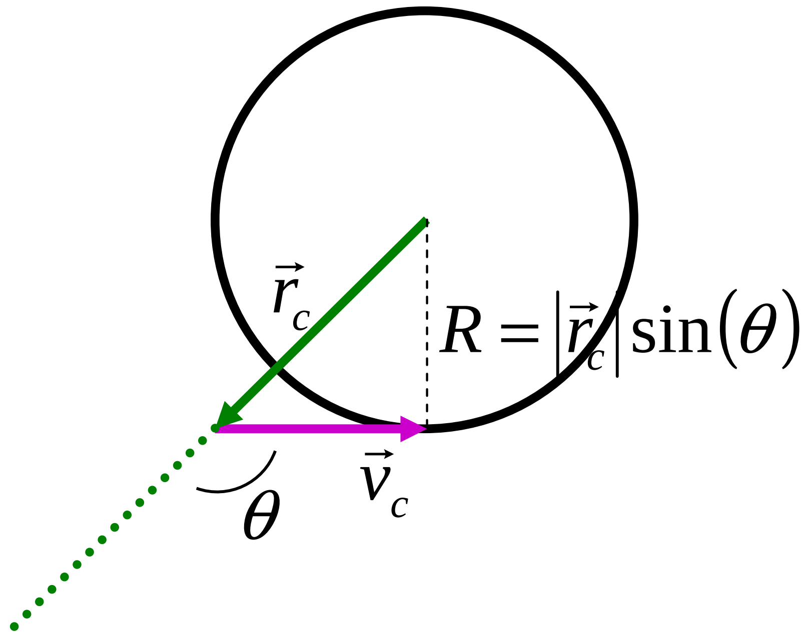
$$K_{bola}^2 = 2R^2 / 5$$

Problema

Num recreio existe um pequeno carrossel de 1,20 m de raio e 180 kg de massa. O seu raio de giração é igual a 91,0 cm. Uma criança de massa igual a 44,0 kg corre a uma velocidade de 8,0 m/s, segundo uma trajectória que é tangente á borda do carrossel e depois pula para o carrossel. Despreze o atrito no eixo mecânico do carrossel. Calcule a (a) inércia á rotação do carrossel á rotação. (b) a intensidade da quantidade de movimento angular da criança em torno do eixo do carrossel. (c) a velocidade do carrossel e da criança depois de a criança ter pulado para cima dele.



$$I_{cl} = M_{cl} K_{cl}^2 = 180 \times 0.91^2 = 149.1\, kg \cdot m^2$$



$$\vec{l}_c = \vec{r}_c \times m_c \vec{v}_c$$

$$\left|\vec{l}_c\right| = m_c |\vec{v}_c| |\vec{r}_c| sen(\theta) = m_c |\vec{v}_c| R$$

$$= 44 \times 8 \times 1.2 = 422.4 kg \cdot m^2 s^{-1}$$

Problema (cont.)

Na ausência de momentos externos aplicados ao sistema (criança + carrossel) durante o "choque" o momento angular total do sistema conserva-se:

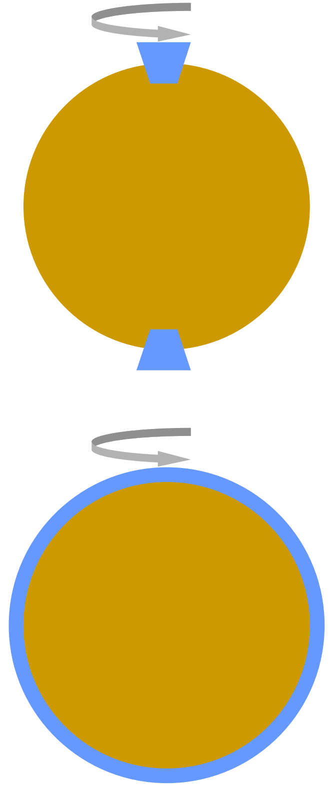
$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

$$l_c = \left(I_{cl} + m_c R^2\right)\omega \Rightarrow \quad \omega = \frac{l_c}{I_{cl} + m_c R^2} = 1.98\, rad\ s^{-1}$$

$$v = \omega R = 2.39 m s^{-1}$$

Problema

Se as calotes de gelo polar da Terra derretessem e a água voltasse aos oceanos estes ficariam cerca de 30 cm mais fundos que efeito isso teria na rotação da Terra? Faça uma estimativa da mudança resultante na duração de um dia. (R_T=6371km, ρ_T=5.5 g/cm^3)



$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

$$\frac{\omega_i}{\omega_f} = \frac{I_f}{I_i} = 1 + \frac{\Delta I}{I_i}$$

Momento de inércia de uma casca esférica

$$\frac{2\pi f_i}{2\pi f_f} = 1 + \frac{\frac{2}{3} M_a R_T^2}{\frac{2}{5} M_T R_T^2} = 1 + 5\frac{\Delta R}{R_T}\frac{\rho_a}{\rho_T}$$

$$\frac{T_f}{T_i} = 1 + 5\frac{\Delta R}{R_T}\frac{\rho_a}{\rho_T} = 1 + 5\frac{0.3}{6.371\times 10^3}\frac{1000}{5500} = 1 + 4.2\times 10^{-5}$$

Problema

Um disco, de momento de inércia I, roda num plano horizontal, em torno do seu eixo (vertical, perpendicular à figura, passando pelo CM) com momento angular L_0. É aplicado um travão, durante o intervalo de tempo Δt, de que resulta um decréscimo do momento angular para L a uma taxa constante.

a) Indique a direcção e o sentido do vector momento angular.

b) Determine o valor do momento de força correspondente à acção do travão, indicando também a sua direcção e sentido.

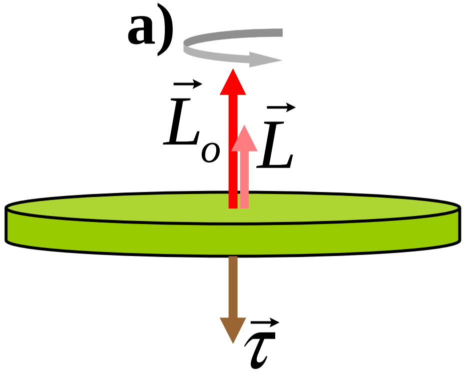
c) Determine o valor da aceleração angular do disco, no intervalo de tempo Δt, indicando também a sua direcção e sentido.

d) Qual o trabalho feito pelo travão no intervalo de tempo Δt?

e) Quantas voltas dá o disco no intervalo de tempo Δt?

Faça I = 0,125 kg m^2, L_0 = 3,0 kg m^2/s, L = 2,0 kg m^2/s , Δt = 1,5 s.

a)



b) $$\tau = \frac{L - L_o}{\Delta t}$$

c) $$\alpha = \frac{\tau}{I}$$

d) $$W_\tau = \frac{I\omega^2}{2} - \frac{I\omega_o^2}{2}$$

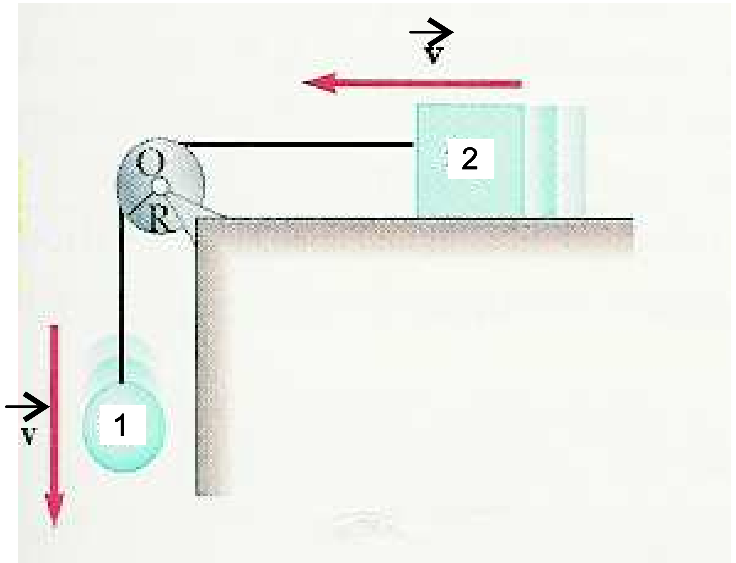
e) $$\Delta\theta = \omega_o \Delta t - \frac{1}{2}\alpha \Delta t^2$$

$$= \left(\frac{L_o}{I}\right)\Delta t - \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\Rightarrow N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

Problema

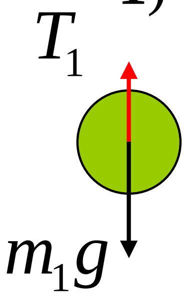
Os corpos 1 e 2, com massa m_1 e m_2, respectivamente, estão ligados por uma corda, de massa desprezável, que passa por uma roldana de raio R e momento de inércia I, em relação ao seu eixo de rotação. Despreze o atrito entre o corpo 2 e a superfície horizontal sobre a qual se desloca. Calcule a aceleração dos corpos 1 e 2, a aceleração angular da roldana e as tensões no fio.



É necessário aplicar a 2ª Lei de Newton aos vários corpos em movimento,

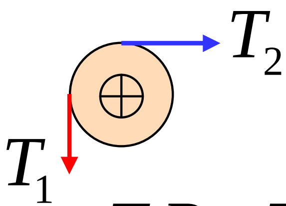
$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}, \quad \text{e/ou} \quad \sum \tau_{ext} = I\alpha$$

1) Corpo m_1



$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1$$

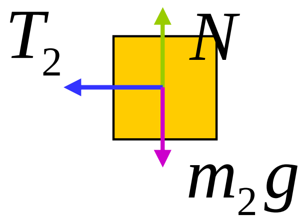
2) Roldana



$$T_1 R - T_2 R = I_{rold}\alpha$$

3) Corpo m_2

$$\begin{cases} T_2 = m_2 a_2 \\ N - m_2 g = 0 \end{cases}$$



4) Equação de ligação $a_1 = a_2 = \alpha R$

Problema, cont.

4) Aceleração dos corpos 1 e 2

$$a = a_1 = a_2 = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}$$

5) Aceleração angular da roldana

$$\alpha = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} \frac{1}{R}$$

6) Tensões no fio

$$T_1 = \frac{m_1\left(m_2 + \frac{I}{R^2}\right)}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} g$$

$$T_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} g$$

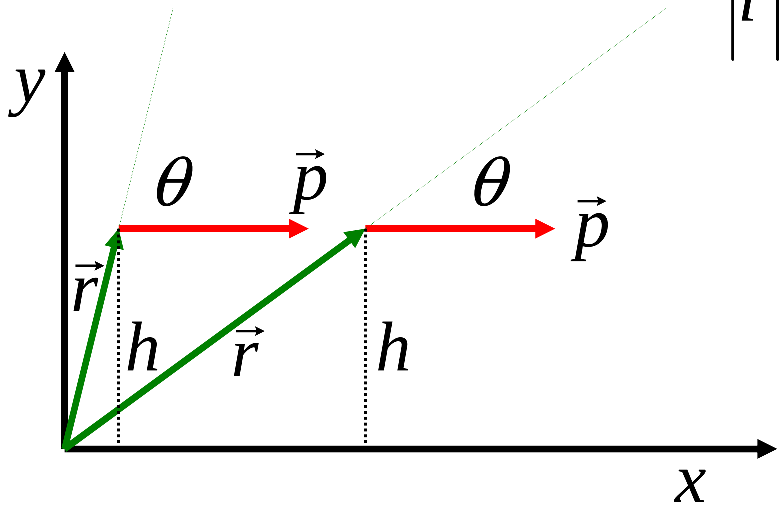
Problema

O momento angular, relativo a um ponto O, de uma partícula com momento linear é dado por , em que é o vector posicional da partícula referente a O. Para uma partícula com movimento rectilíneo uniforme, qual é a variação no tempo do seu momento angular relativo a qualquer ponto? Justifique.

Sugestão: Considere um ponto O qualquer exterior à linha do movimento e calcule em relação a ele o momento angular da partícula em duas posições diferentes.

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\left|\vec{l}\right| = \left|\vec{p}\right| \underbrace{\left|\vec{r}\right| \sin(\theta)}_{h} = mvh = cte.$$

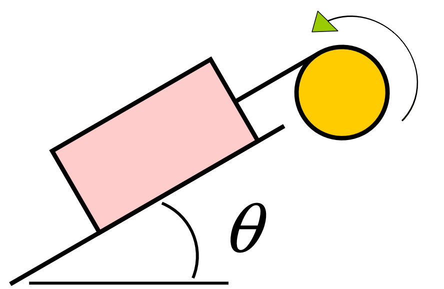


Á medida que a partícula se desloca, o vector posição varia de forma a que rsen(θ)=h=cte.

A variação é nula pois o momento angular não varia em módulo, direcção e sentido.

Problema

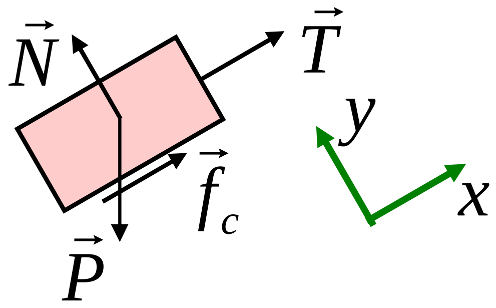
Um bloco de massa 20 kg desliza sobre um plano inclinado de 30º, ligado a uma corda, inextensível e de massa desprezável, enrolada numa polia de 2 kg e de raio 7.5 cm. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre a superfície do plano e o bloco é de 0,3, e considerando a polia como um disco rígido: a) Represente esquematicamente as forças que actuam no bloco e na roldana. b) Determine a aceleração do bloco. c) Determine a tensão na corda.



$$I = \frac{mR^2}{2}$$

1) Aplicando a 2ª Lei de Newton ao bloco,

$$\sum \vec{F}_{i,ext} = M\vec{a}$$

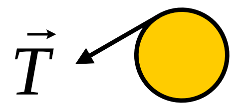


$$\begin{cases} Mg\sin(\theta) - f_c - T = Ma_x \\ N - Mg\cos(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$f_c = \mu_c N$$

2) Aplicando a 2ª Lei de Newton da Rotação em relação ao CM

$$\sum \tau = I\alpha$$

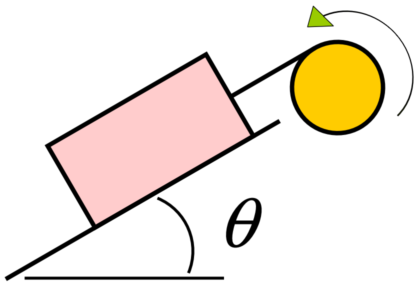


$$TR = I\alpha$$

3) Equação de ligação entre o movimento de rotação e o de translação do CM

$$a_x = \alpha R$$

Problema



$$a = \frac{g\left(\sin(\theta) - \mu_c \cos(\theta)\right)}{1 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} g\left(\sin(\theta) - \mu_c \cos(\theta)\right)$$

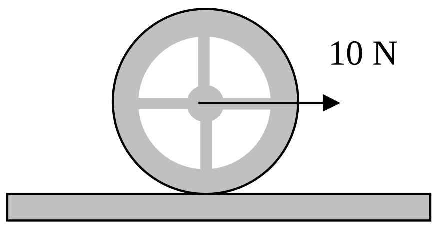
Problema

Uma força constante, horizontal, de 10 N, é aplicada à roda representada, que tem 10 kg de massa e 0,30 m de raio no eixo. A roda rola (sem deslizar) sobre a superfície horizontal sendo a aceleração do seu centro de massa igual a 0,60 m/s^2.

a) Quanto vale e qual a direcção da força de atrito que actua na roda?

b) Quanto vale o momento de inércia da roda referido ao eixo de rotação que passa pelo seu centro de massa (use as leis da dinâmica e do rolamento)?

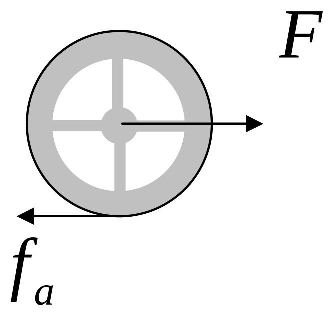
c) Qual é a energia cinética da roda após 2,0 s, supondo que no instante t = 0 a roda estava em repouso.



Problema (cont.)

(a) Pela 2ª Lei de Newton aplicada no CM

$$F - f_a = ma \Rightarrow f_a = 4N$$



(b) Pela 2ª Lei de Newton da rotação aplicada no CM

$$a = \alpha R$$

$$f_a R = I\alpha \Rightarrow I = \frac{f_a R}{a/R} =$$

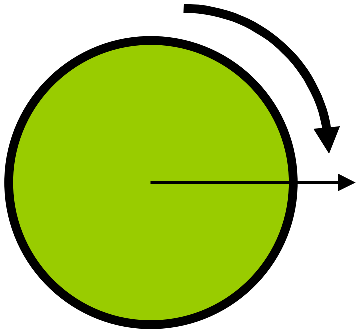
(c) A energia cinética é a soma da energia cinética de translação e de rotação

$$E_c = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \Rightarrow \left(m + \frac{I}{R^2}\right)\frac{v^2}{2}$$

No movimento unif. acelerado: $v = at$

Problema

A uma bola de bowling de raio *R* é dada uma velocidade v e uma velocidade angular inicial ω. O coeficiente de atrito cinético entre a bola e a pista é μ_c. (a) Qual é a velocidade da bola quando começa a rolar sem deslizar? (b) Durante quanto tempo é que a bola desliza antes de entrar em rolamento puro? (c) Que distância percorre nesse tempo?



$$\vec{f}_c = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad f_c = ma \quad \Rightarrow \quad \mu_c N = ma$$

$$\mu_c mg = ma \quad \Rightarrow \quad a = \mu_c g$$

Exercício

Uma barra cilíndrica com 24 cm de comprimento, massa 1.2 kg e raio 1.5 cm, tem ligada a uma das extremidades uma bola de massa 20 kg e diâmetro 8.0 cm . O conjunto está inicialmente na posição vertical, com a bola no topo, e é livre de rodar em torno da outra extremidade.

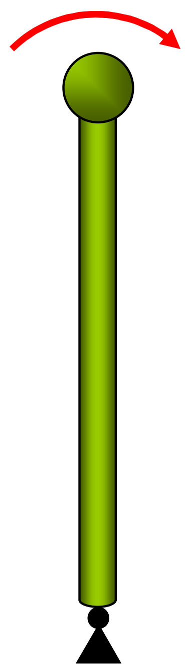
Depois do conjunto ter caído um quarto de uma volta, determine:

a) a sua energia cinética rotacional;

b) a sua velocidade angular;

c) a velocidade linear da bola;

d) a velocidade que a bola teria se tivesse caído livremente de uma altura igual ao raio; compare este valor com o obtido em c).



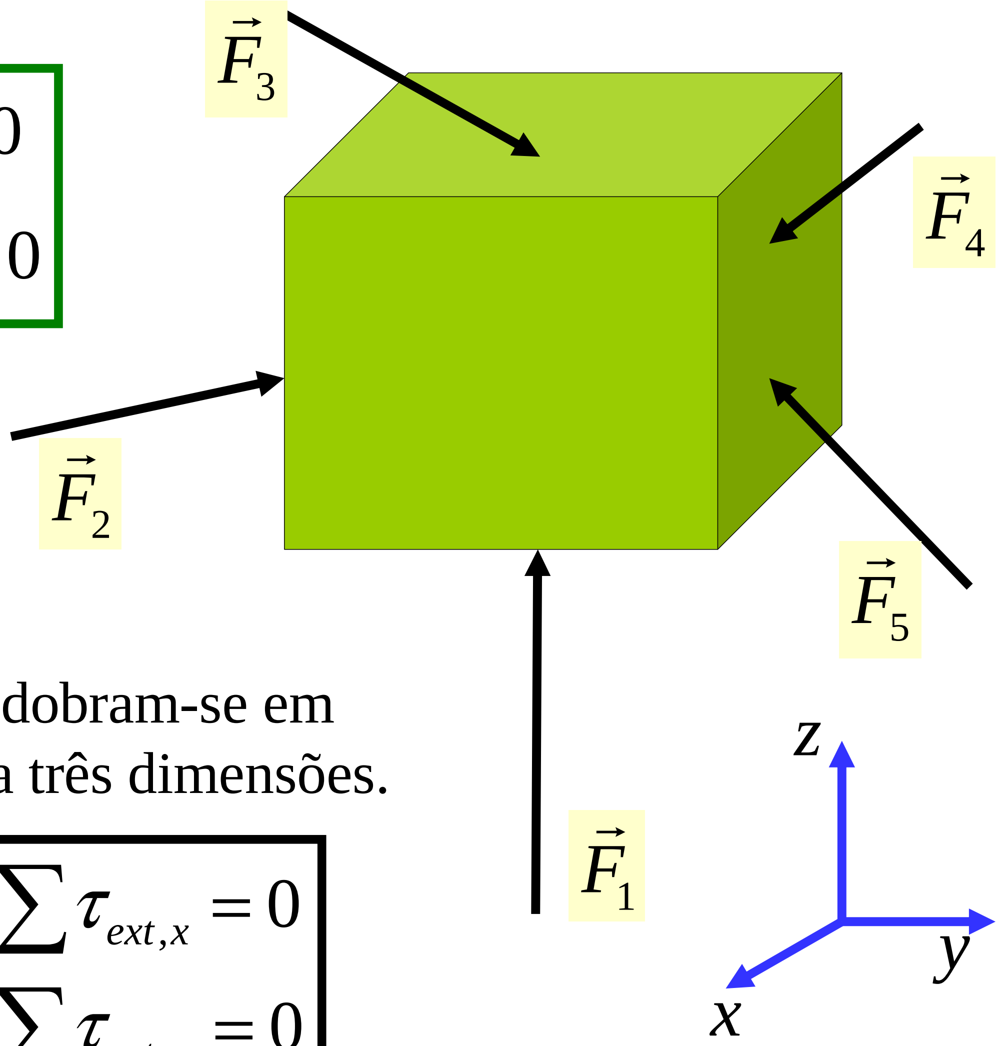
Aula 24 - Equilíbrio Estático de Corpos Rígidos

Para que um corpo esteja em equilíbrio é necessário, de acordo com a Segunda Lei de Newton, que:

O centro de massa não tem aceleração.

$$\boxed{\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ext} &= 0 \\ \sum \vec{\tau}_{ext}^{\,CM} &= 0 \end{aligned}}$$

O corpo rígido não tem movimento de rotação em relação ao CM.



As anteriores equações vectoriais desdobram-se em três equações escalares, num espaço a três dimensões.

$$\boxed{\begin{cases} \sum F_{ext,x} = 0 \\ \sum F_{ext,y} = 0 \\ \sum F_{ext,z} = 0 \end{cases}} \quad \text{e,} \quad \boxed{\begin{cases} \sum \tau_{ext,x} = 0 \\ \sum \tau_{ext,y} = 0 \\ \sum \tau_{ext,z} = 0 \end{cases}}$$

Resultante do Momento das Forças externas

Mas como o momento relativo ao CM está relacionado com o momento relativo a qualquer outro ponto de acordo com a expressão:

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \sum \vec{\tau}_{ext}^{\,CM} + \vec{r}_{cm} \times \sum \vec{F}_{ext}$$
$$\sum \vec{\tau}_{ext} = 0 + 0$$

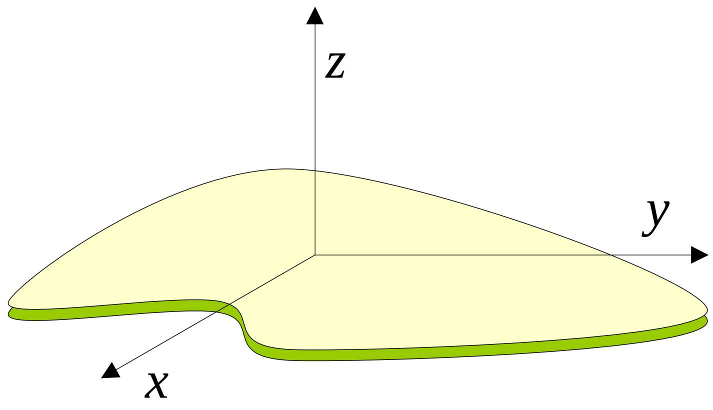
Podemos então dizer, já que a resultante das forças externas é nula, que se o momento das forças externas relativamente ao CM for nulo também o será relativamente a qualquer outro ponto.

Assim as condições de equilíbrio podem ser escritas da seguinte forma:

$$\boxed{\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ext} &= 0 \\ \sum \vec{\tau}_{ext} &= 0 \end{aligned}}$$

Problema a Duas Dimensões

Se o problema de equilíbrio tiver **apenas duas dimensões** então reduzem-se o número de equações



Duas equações para o equilíbrio de forças, em x e em y:

$$\boxed{\begin{cases} \sum F_{ext,x} = 0 \\ \sum F_{ext,y} = 0 \\ \end{cases}}$$

E **uma** equação do equilíbrio dos momentos de forma a impedir a rotação em torno do eixo z,

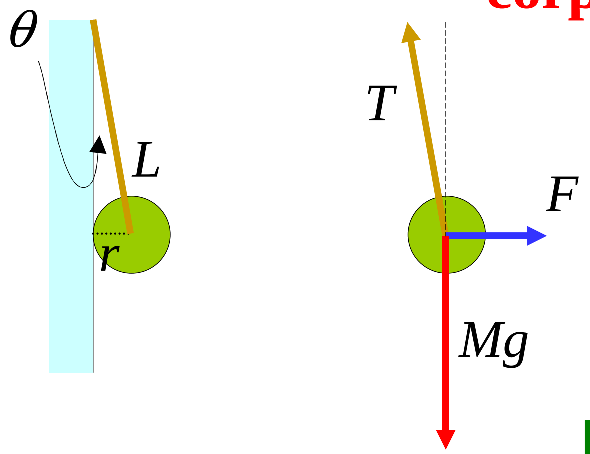
$$\boxed{\begin{cases} \\ \\ \sum \tau_{ext,z} = 0 \end{cases}}$$

Problema de Equilíbrio de Forças

Sabendo que o raio da esfera é r e que o comprimento do fio é L e a massa da esfera é M, determine as forças exercidas no fio e na parede.

Diagrama do corpo livre

$$\sin(\theta) = \frac{r}{L}$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \quad F - T\sin(\theta) = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \quad T\cos(\theta) - Mg = 0$$

$$F = Mg\frac{r}{\sqrt{L^2 - r^2}}$$
$$T = Mg\frac{L}{\sqrt{L^2 - r^2}}$$

Q: Dois esferas têm a mesma massa mas diâmetro diferente. Para qual deles é a tensão do fio maior? E se forem de massa diferente mas do mesmo material?

Problema

Um tubarão com o peso de 10000 N está pendurado por uma corda numa barra 4.00 m de comprimento que pode rodar em torno da sua base.

Determine a tensão na corda quando o sistema se encontra na posição indicada na figura. Determine também as forças horizontal e vertical exercidas na base da barra. (Despreze o peso da barra).

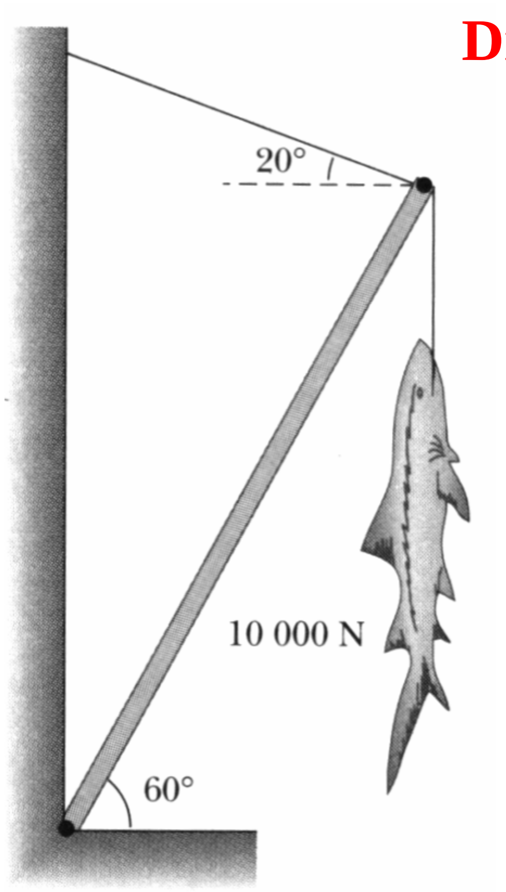
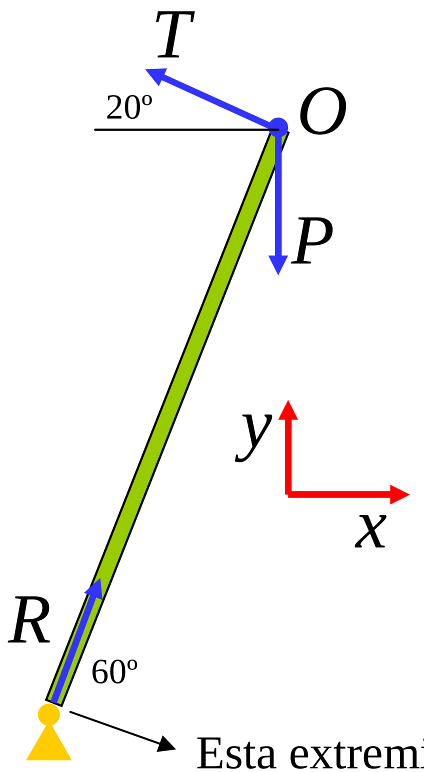


Diagrama do corpo livre



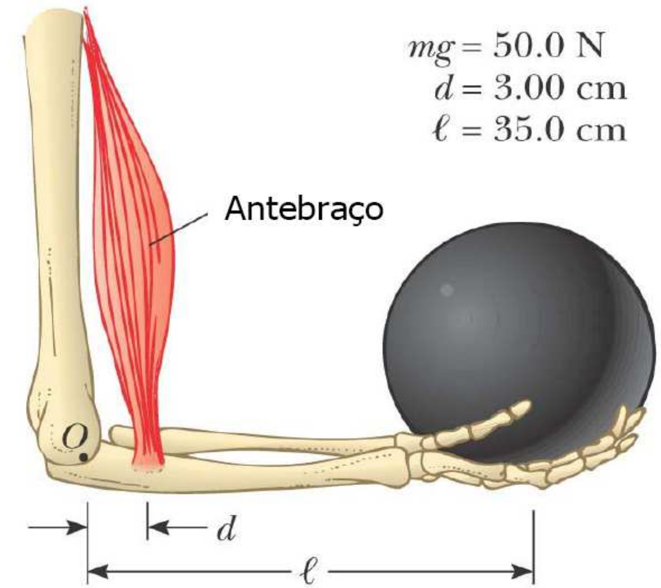
Esta extremidade é livre de rodar

$$\begin{array}{l} \text{em x}: \\ \text{em y}: \end{array} \begin{cases} -T\cos(20)+R\cos(60)=0 \\ -P+T\sin(20)+R\sin(60)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T=5077N \\ R=9541N \\ R_x=8263N \\ R_y=4470N \end{cases}$$

Problema: Massa na Mão.

Qual a força exercida pelo antebraço e pelos músculos para que a mão possa suportar a massa de 7.2 kg?



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F - R - mg = 0$$

$$\sum \tau = 0 \quad \Rightarrow \underbrace{Fd - mgl}_{} = 0$$

Momento relativos a O

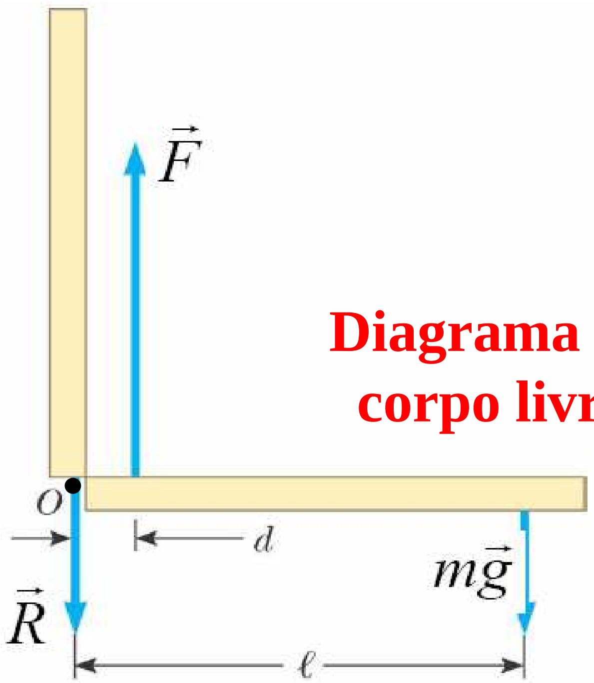


Diagrama do corpo livre

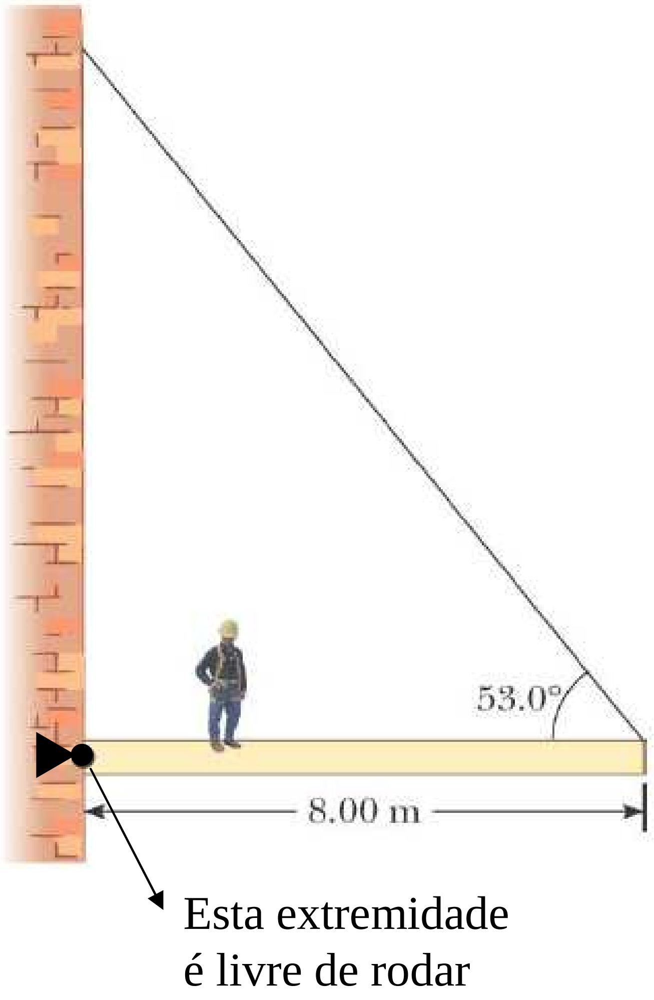
$$F = mg\frac{l}{d}$$

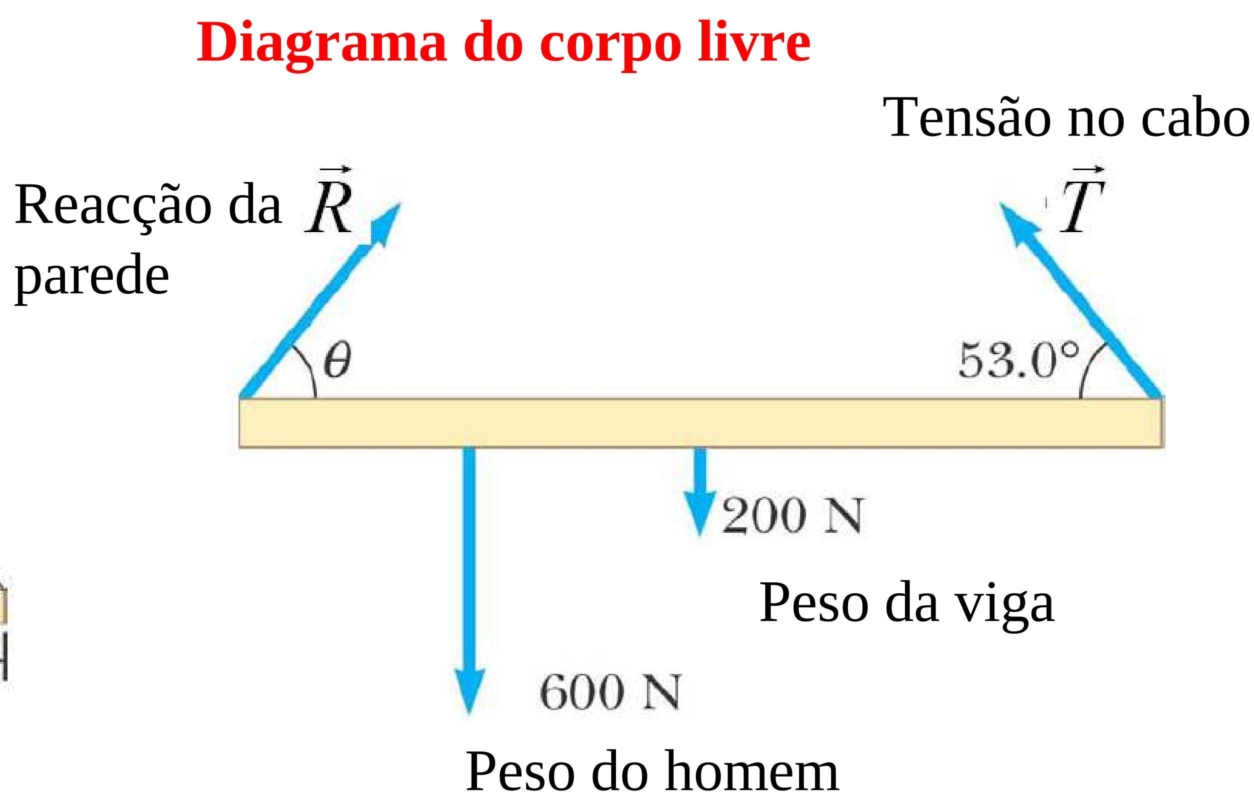
$$R = mg\left(\frac{l}{d} - 1\right)$$

Que conclusões pode tirar deste resultado?

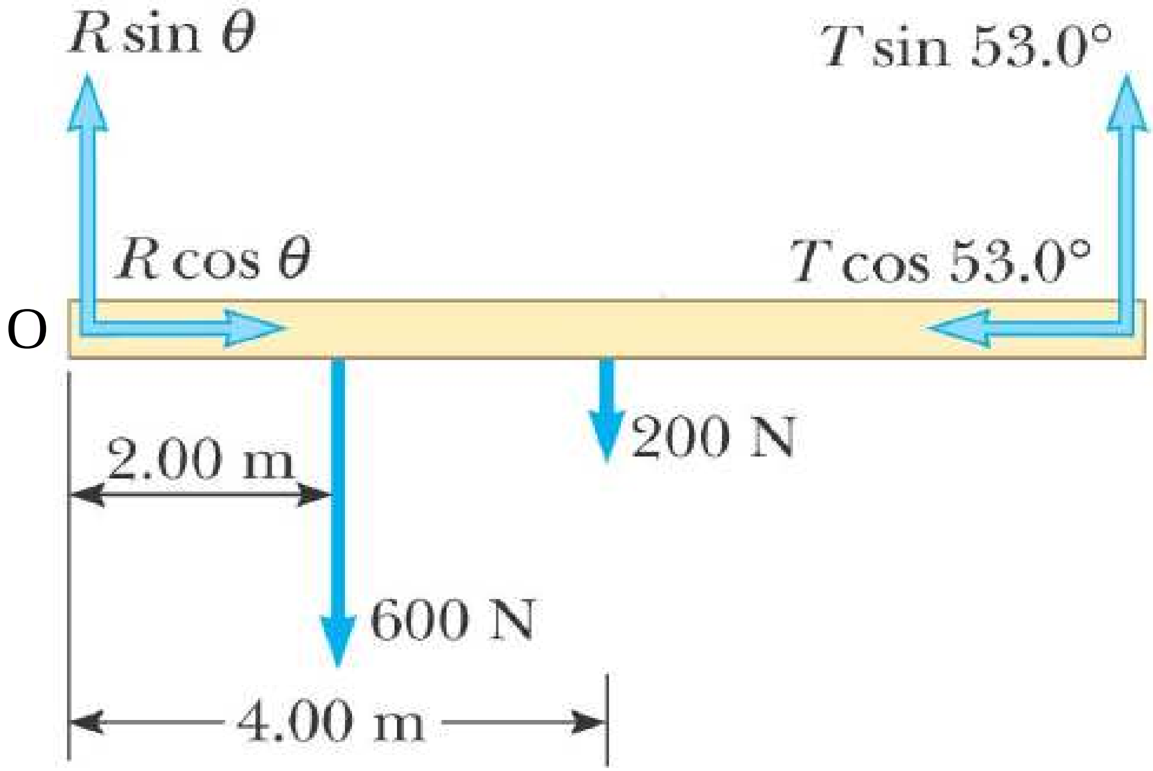
Problema - Barra Horizontal

Qual a tensão no cabo e a força aplicada pela parede de acordo com os dados da figura?





Problema - Barra Horizontal, cont.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R\cos(\theta) - T\cos(53.0^o) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R\sin(\theta) - 600 - 200 + T\sin(53.0^o) = 0$$

$$\sum \tau = 0 \quad \Rightarrow 600\times 2 + 200\times 4 - T\sin(53.0^o)\times 8 = 0$$

Momentos relativos a O

Estas 3 equações permitem determinar R, T e o ângulo θ.

Problema

Uma escada uniforme, com comprimento L = 6 m, e peso com módulo 400 N está encostada a uma parede vertical sem atrito, com a extremidade inferior à distância D = 3.6 m da parede. O coeficiente de atrito estático entre a escada e o chão é μ_e = 0.40. Um homem com o peso de módulo 800 N sobe lentamente a escada.

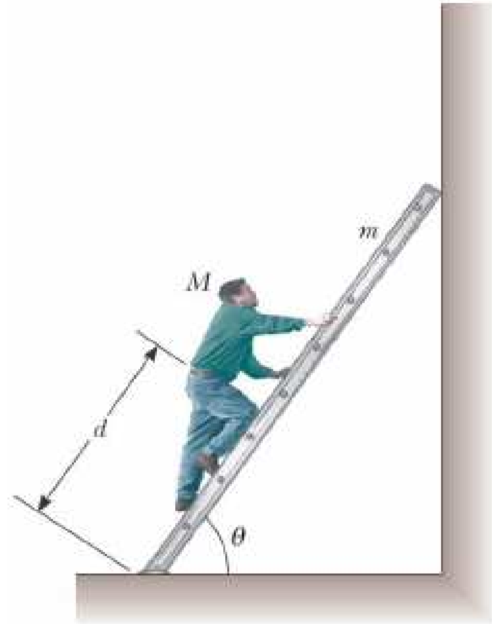
a) Apresente um diagrama das forças aplicadas à escada, bem como a respectiva legenda, identificando cada uma das forças. (Sugestão: no diagrama desenhe a escada de perfil)

b) Qual é o valor máximo do módulo da força de atrito estático que o chão pode exercer sobre a escada?

c) Apresente as expressões das condições de equilíbrio estático da escada. Não se esqueça de indicar o sistema de referência que utilizar.

d) Tendo o homem percorrido 3.0 m ao longo da escada, qual é o módulo da força de atrito exercida pelo chão na escada nesse instante?

e) Obtenha a expressão matemática da distância que o homem pode percorrer ao longo da escada até que esta comece a deslizar?



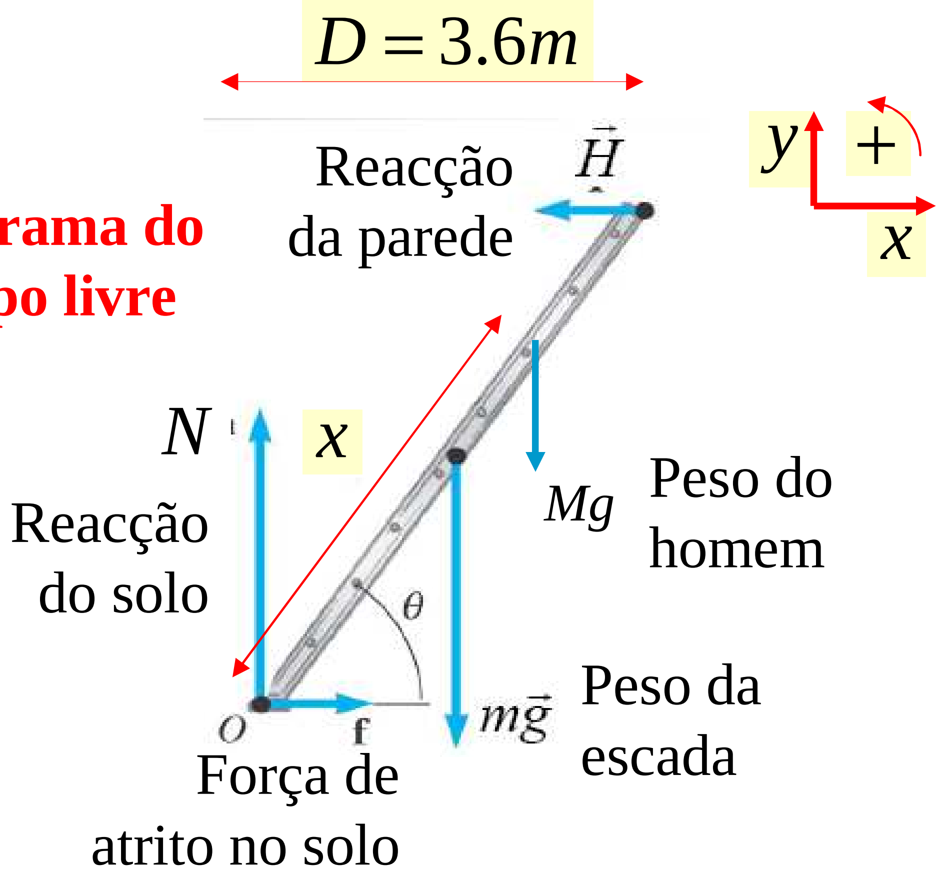
Problema (cont)

$L = 6$

$$\cos(\theta) = \frac{3.6}{6} \Rightarrow \theta = 53.1^{o}$$

$$f_{ae,\max} = \mu_e N$$

Diagrama do corpo livre



c) Equações do equilíbrio

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H + f_{ae} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg - Mg = 0$$

$$\sum \tau = 0 \quad \Rightarrow HL\sin(\theta) - Mg[x\cos(\theta)] - mg\left(\frac{L}{2}\cos(\theta)\right) = 0$$

Problema (cont)

c) Equações do equilíbrio

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H + f_{ae} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg - Mg = 0$$

$$\sum \tau = 0 \quad \Rightarrow HL\sin(\theta) - Mg[x\cos(\theta)] - mg\left(\frac{L}{2}\cos(\theta)\right) = 0$$

$$b)\ f_{ae,\max} = 480N$$

$$d)\ x = 3 \quad \Rightarrow \quad f_{ae} = 450N$$

$$e)\ f_{ae} = f_{ae,\max} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{L}{2}\cdot\frac{2f_{ae,\max}\tan(\theta) - mg}{Mg} = 3.28m$$